INSTRUCCIONES PARA EL PROFESOR

Objetivo Principal:

Introducir el *concepto de función*

Objetivos particulares

Introducir el *concepto de: Variable, variable dependiente, variable independiente y parámetro*.

Proyecto Poleas

Las siguientes sugerencias de actividades son sugeridas al profesor en el entendido de que estará en libertad de extender o reducir la explicación y actividades para la promoción en la adquisición de los conceptos matemáticos, si lo desea.

Los conceptos de *variable y función*, son el prerrequisito para cualquier curso de matemáticas a nivel medio superior y superior; en particular para el cálculo diferencial e integral. Además, dado que muchas de las relaciones cotidianas son funcionales, este concepto debería ser parte de la cultura básica de matemáticas. Sin embargo, numerosos reportes de investigación advierten de que este es un concepto complejo de enseñar y aprender; por ello proponemos acciones graduadas que conlleven a una promoción en la comprensión de este complejo concepto, el cual se irá definiendo en el tiempo y en cursos posteriores[1]. En esta primera parte de introducción sólo pretendemos llegar a la definición de una función real, como una relación que asocia un número real con otro número real. De acuerdo al esquema didáctico[2], para promover la adquisición de los conceptos mencionados se hará una introducción a los mismos mediante un proyecto de acción práctica, que conducirá, mediante actividades diseñadas dentro del marco didáctico, a reconocer y representar a las funciones reales en sus diversas formas o representaciones: algebraica, flechas conjuntistas, tabla de valores y gráfica.

La introducción del concepto de función, deberá nacer unificado con los conceptos dominio y rango (al igual que un nombre tiene apellido paterno y materno), como parte de la misma y de los conceptos funcionales básicos se dosificará mediante tres escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI) que simulan el tirar de una cuerda a través de una polea y se complementará con actividades posteriores.

[1] Es nuestra creencia que la comprensión del concepto de función, es gradual en el tiempo y que las propiedades (v. gr. Extensionalidad, continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, etc) van afirmando el concepto con el tiempo.

[2] Proponemos el marco didáctico de Cuevas & Pluvinage (2003, 2006), que contiene elementos de diversas propuestas teóricas.

Recordemos que los conceptos necesarios para la comprensión de función, que se podrían contemplar como objetivos específicos o particulares son:

Relación funcional; Parámetro; Variable independiente y Variable dependiente.

Para lograr la introducción de todos estos objetivos y los de:

Función; Dominio y Rango

Se proponen un Cuestionario y dos actividades que dosifican la introducción del concepto de función. Antes de desarrollar el trabajo con los modelos geométrico-matemáticos, se recomienda mostrar a los estudiantes, de manera breve, el funcionamiento de poleas reales. En este funcionamiento se observará el funcionamiento de una polea simple fija y sus componentes. Es importante mostrar ejemplos de la utilidad de las mismas y su uso constante en: edificios en construcción, talleres mecánicos, grúas de puertos marítimos, talleres, fábricas, incluso en fiestas cuando se cuelga una piñata. Una polea cambia la dirección de la fuerza, por ejemplo para alzar un objeto tiramos de una cuerda.

De no poder mostrar poleas reales, se puede optar por un texto acompañado por unas figuras como a continuación se proporciona al hacer clic sobre Poleas. De tener acceso a Internet hacer clic sobre PoleaInternet.

Primera actividad Polea1

Se muestra a los estudiantes una plataforma que consta de tres pestañas:

En la página web http://mattec.matedu.cinvestav.mx/univermath/escenarios.didacticos/ que incluye dos modelos de polea interactiva (Applet), para que los estudiantes lo puedan manipular libremente.

Un cuestionario, denominado Actividad 1, con instrucciones del escenario Polea1 (Burro) e indicaciones de propósitos, para dirigir la actividad mediante el llenado del mismo por el(los) estudiante(s) y entregar al profesor al concluir la actividad o al salir del salón de clase.

Esta actividad consiste en ofrecer a los alumnos un escenario virtual, para que se familiaricen con el uso de una polea y sus componentes. Esta actividad es libre, pero es conveniente hacer notar a los alumnos que observen al tirar de la cuerda, que es lo que cambia y que lo que permanece constante.

Para ejecutar este programa se hace doble clic sobre la dirección anterior o escribirla en la barra de direcciones y aparece una figura como la figura 1.

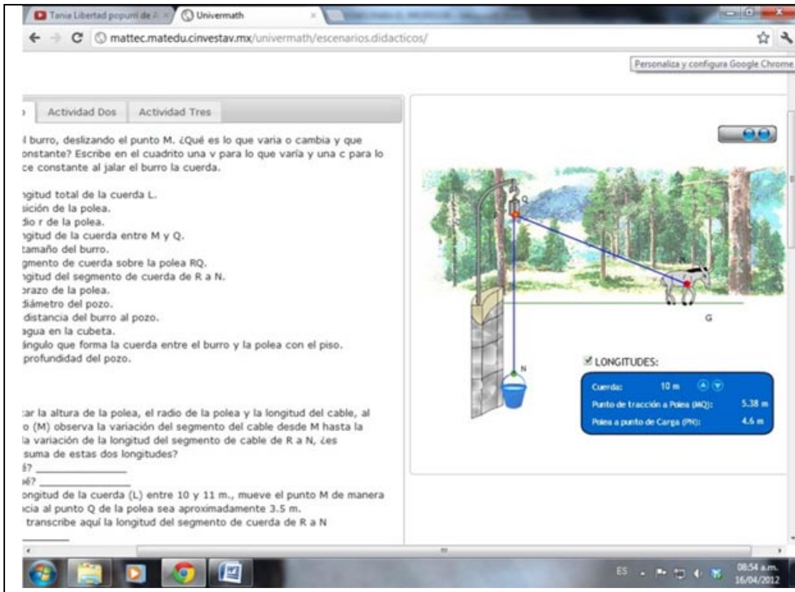


Figura 1. Actividad de Polea1.

La actividad se desarrolla al jalar el punto M, la cuerda para mover la cubeta.

Por ejemplo para jalar el punto M se sitúa el puntero o ratón en el punto M y se oprime el botón izquierdo del mismo. Dejando oprimido este botón al deslizar el ratón se mueven polea, cuerda, puntos y la cubeta.

El estudiante, antes de empezar a jalar, puede modificar:

- La longitud de la cuerda, al mover el punto L.
- La posición de la polea al mover el punto P.
- La dimensión o radio de la polea, al mover el punto R.

Es importante que el estudiante observe que al mover el punto M, los tres segmentos de la cuerda: $\overline{MP}$; segmento sobre la polea y $\overline{PN}$ cambian de valor.

Observaciones:

1. Una confusión constante es asociar los cambios a los puntos y no a los segmentos de cuerda, como es nuestro objetivo. Por ello es necesarios de nuevo, insistir que los puntos de la figura L, M, N, P y R sólo hacen referencia a la posición de los objetos y no son importantes. Lo importante es observar los cambios en las **tres** longitudes de la cuerda al jalar la misma.

2. Para arrastrar un objeto, se sitúa el puntero del ratón en el objeto (punto) y se oprime el botón izquierdo del mismo. Dejando oprimido este botón al deslizar el ratón se mueven el objeto.

3. Es recomendable poner a dos estudiantes por computadora, en donde tienen que alternar los roles. Uno mueve el applet y el otro discute y llena parte del cuestionario. Los papeles se pueden cambiar conforme la actividad se desarrolle.

Tiempo propositivo: 30 min.

Se resuelve correctamente el cuestionario, seleccionando para ello las respuestas dadas al azar por diversos estudiantes.

Segunda actividad PoleaMLibre

La segunda actividad, se denomina PoleaMLibre.html, y es la modelización del movimiento de una polea con movimiento libre al jalar del punto M. Este es el modelo geométrico-matemático de la actividad anterior. La polea y cubeta se sustituyen por un punto, la distancia de M a la polea por la variable x y la distancia de P a N por la variable y.

Se entrega a los estudiantes un material que consta de tres elementos:

El archivo con la página web PoleaMlibre.html que incluye un modelo de polea interactivo (Applet), para que los estudiantes lo puedan manipular libremente.

Un documento, denominado Actividad Uno, con instrucciones del escenario PoleaMlibre e indicaciones de propósitos, para dirigir la actividad mediante el llenado del mismo por el(los) estudiante(s) y entregar al profesor al concluir la actividad o al salir del salón de clase.

Observaciones

1. De nuevo una confusión constante es asociar los cambios a los puntos y no a los segmentos de cuerda, como es nuestro objetivo. Por ello es necesarios insistir de nuevo que los puntos de la figura L, M, N, P y R sólo hacen referencia a la posición de los objetos y no son importantes. Lo importante es observar los cambios en las **dos** longitudes de la cuerda x e y, al jalar la misma.

2. Es recomendable poner a dos estudiantes por computadora, en donde tienen que alternar los roles. Uno mueve el applet y el otro discute y llena parte del cuestionario. Los papeles se pueden cambiar conforme la actividad se desarrolle.

3. En principio, no hace falta dar explicaciones a los estudiantes una vez instalados frente a las computadoras, sino conducir mediante indicaciones el tiempo a dedicar a la actividad.

La actividad está prevista para un tiempo de 30 a 45 minutos, respuestas escritas incluidas.

Por ningún motivo el profesor debe ayudar a los alumnos a contestar el cuestionario, en caso de que algunos estudiantes soliciten aclaraciones, la respuesta general consiste en proponerles considerar los elementos escritos y manejar el modelo para relacionar ambas cosas.

Al acabar de contestar este cuestionario, se recomienda al profesor, tomar respuestas al azar, de los cuestionarios recogidos, y discutir las respuestas con el grupo, hasta llegar a la solución correcta.

En general se observa que algunos estudiantes no pueden contestar correctamente el cuestionario, debido a que no poseen el lenguaje matemático necesario, de ser así, este es el momento de introducir la notación de intervalos y desigualdades.

Una manera de introducirlos es plantear la necesidad un lenguaje que hará posible la comunicación, ante la diversidad de las respuestas de los cuestionarios; en donde es posible que algunos tengan la respuesta correcta pero en un vocabulario demasiado personal. Por ello y ante esta necesidad se introduce la recta numérica y al tomar un segmento de la misma, el intervalo, cerrado y abierto. Al tomar dos pedazos de la misma se introduce la unión de intervalos y la intersección.

Desarrollo matemático

La página web simula una polea simple fija en P. Al arrastrar el punto M, de tracción del cable, éste se puede desplazar libremente en el plano, y con ello jala el peso representado por el punto N (el otro extremo del cable) que se sitúa debajo del punto P.

Las relaciones que se definen son:

La relación funcional está definida por el movimiento de la polea.

El parámetro es la longitud de la cuerda l cuyo valor, define el estudiante al iniciar la actividad.

Al empezar a jalar la cuerda arrastrando el punto M, queda definida la relación:

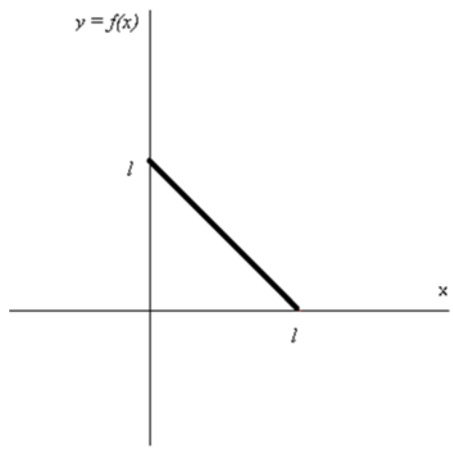
;$\overline{MP + PN} = x + y$; donde $\overline{MP} = x$; $\overline{PN} = y$.

Como l es la longitud del cable medida en cm. Se tiene que $y = l - x$.

Evidentemente, $0 \leq x = \overline{MP} \leq l$ (x inferior o igual a la longitud del cable). Lo cual define en forma clara el dominio de la relación y como $0 \leq y = \overline{PN} \leq l$; el rango también queda definido.

Al manipular la polea se presentan dos casos:

Si se trabaja en la página web, desaparecen las variables "x" y "y" y sus valores cuando $x = \overline{MP}$ es mayor a la longitud de cable.
Si se trabaja directamente con el archivo Cabri, se puede "jalar" el cable hasta que la distancia MP sea mayor que la longitud de cable; x sigue expresando la distancia MP, pero aparece la leyenda: "y = no existente" en la **ventana.**
En cualquier caso, la función considerada no está definida cuando x sobrepasa la longitud de cable. La longitud l, constituye el parámetro en el estudio, x es la variable independiente, y por supuesto y la variable dependiente. Y la relación funcional queda definida por $y = l - x$. Este primer acercamiento, al concepto de función, sólo se hace con números reales no negativos, que pertenecen a un intervalo acotado. En este sentido, la función queda definida como $f(x) = l - x$, en donde $D_f = \{x \in \mathbb{R}^+ | 0 \leq x \leq l\} = [0, l]$ y $R_f = \{f(x) \in \mathbb{R}^+ | 0 \leq x \leq l\} = [0, l]$. Y su gráfica es el segmento de la línea recta que se dibuja como lugar geométrico.



En síntesis: la variable independiente es el segmento de cuerda $\overline{MP} = x$; la variable dependiente es el segmento de cuerda $\overline{PN} = y$; La función queda definida por $y = l - x$ e incluso se introduce la notación $f(x) = l - x$, donde $y = f(x)$.
El dominio de la función queda definido por el intervalo $[0, l]$, puesto que cuando se jala por completo del punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de x adquiere la longitud total de la cuerda l. Y cuando no se jala nada el punto M (el punto M se pega a la polea en el punto P) la variable x alcanza el valor de cero.
El rango de la función queda también definido por el intervalo $[0, l]$, puesto que cuando se jala por completo el punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de y,

adquiere la longitud total de la cuerda l. Y cuando se jala por completo del punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de y adquiere el valor cero.

En este caso, la polea no se sitúa en ejes cartesianos y por lo tanto no define segmentos dirigidos.

Tercera actividad Poleaoord0

La tercera y última actividad se denomina PoleaCoord0.html. Este escenario, al igual que el anterior simula el movimiento de una polea, pero en este caso la sitúa en el origen de un plano cartesiano. Esta polea simula una situación como la de sacar agua de una noria, jalada por un burro. Esta actividad constituye el soporte de este estudio y la conclusión.

Se entrega a los estudiantes un material que consta de tres elementos:

El archivo de una página web PoleaCoord0.html que incluye un modelo de polea interactivo (Applet), dentro de un sistema de ejes cartesianos, para que los estudiantes lo puedan manipular libremente.

Un cuestionario, denominado Actividad Dos, con instrucciones del escenario PoleaCoord0 e indicaciones de propósitos, para dirigir la actividad mediante el llenado del mismo por el(los) estudiante(s) y entregar al profesor al concluir la actividad o al salir del salón de clase.

Es recomendable poner a dos estudiantes por computadora, en donde tienen que alternar los roles. Uno mueve el applet y el otro discute y llena parte del cuestionario. Los papeles se pueden cambiar conforma la actividad se desarrolle.

En esta etapa, no es necesario dar explicaciones a los estudiantes una vez instalados frente a las computadoras, sino conducir mediante indicaciones el tiempo a dedicar a la actividad.

La actividad está prevista para una media hora, respuestas escritas incluidas.

Por ningún motivo el profesor debe ayudar a los alumnos a contestar el cuestionario, en caso de que algunos estudiantes soliciten aclaraciones, la respuesta general consiste en proponerles considerar los elementos escritos y manejar el modelo para relacionar ambas cosas.

Al terminar de contestar este cuestionario, se recomienda al profesor, tomar respuestas al azar, de los cuestionarios recogidos, y discutir las respuestas con el grupo, hasta llegar a la solución correcta. Es posible que algún estudiante no pueda contestar correctamente el cuestionario, debido a que no posee el elementos de prerrequisito, de ser así, éste el momento de introducir, el concepto de función real, función lineal y de segundo grado.

La relación funcional está definida por el movimiento de la polea. El parámetro es la longitud de la cuerda l cuyo valor define el estudiante al empezar a jalar la cuerda y queda definida por la relación: $\overline{MP}+\overline{PN}=x-y=l$

Las relaciones que se definen son:

$\overline{MP}=x$; $\overline{PN}=-y$; $\overline{MP}+\overline{PN}=x-y=l$,

donde l es la longitud del cable. De aquí que $y=x-l$.

Evidentemente, $0\leq x=\overline{MP}\leq l$ (x inferior o igual a la longitud del cable). Lo cual define en forma clara el dominio de la relación y como $0\leq y=\overline{PN}\leq -l$; el rango también queda definido.

Al manipular la polea se presentan dos casos:

Si se trabaja en la página web, desaparecen las variables (x, y) y sus valores cuando $x=MP$ es mayor a la longitud de cable.

Si se trabaja directamente con el archivo Cabri, se puede "jalar" el cable hasta que la distancia MP sea mayor que la longitud de cable; x sigue expresando la distancia MP, pero aparece la leyenda: "y = no existente" en la ventana.

En cualquier caso, la función considerada no está definida cuando x sobrepasa la longitud de cable. La longitud l, constituye el parámetro en el estudio, x es la variable independiente, y por supuesto y la variable dependiente. Y la relación funcional queda definida por $y=l-x$. Este primer acercamiento, al concepto de función, sólo se hace con números reales no negativos, que pertenecen a un intervalo acotado. En este sentido, la función queda definida como $f(x)=l-x$, en donde $D_f=\{x\in\mathbb{R}^+|0\leq x\leq l\}$ y su gráfica es el segmento de la línea recta que se dibuja como lugar geométrico.

En síntesis, la variable independiente es el segmento de cuerda identificada con la abscisa $\overline{\mathrm{MP}}=\mathrm{x}$.

La variable dependiente es el segmento de cuerda $\overline{PN=y}$.

La función queda definida por $y=l-x$ e incluso se introduce la notación $f(x)=\mathrm{l}-\mathrm{x}$, donde $y=f(x)$.

El dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R}^+ | 0 \leq x \leq l\}$ queda definido por el intervalo $[0, l]$, puesto que cuando se jala por completo del punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de x adquiere la longitud total de la cuerda l. Y cuando no se jala nada el punto M (el punto M se pega a la polea en el punto P) la variable x alcanza el valor de cero.
El rango de la función queda también definido por el intervalo $[0, l]$, puesto que cuando se jala por completo el punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de y, adquiere la longitud total de la cuerda l. Y cuando se jala por completo del punto M (el punto N se pega a la polea en el punto P), el valor de y adquiere el valor cero.
En este caso, la polea se sitúa en ejes cartesianos y por lo tanto el movimiento al jalar el punto M, define segmentos dirigidos.
Para obtener los resultados esperados, es necesario que los estudiantes se conduzcan en forma autónoma, en la actividad y respondan por si mismos la hoja de cuestionario y tendrán que devolver a final de las actividades sus respuestas escritas en esta misma hoja.
Es conveniente que una vez que se defina una función real, se trabaje con ejemplos, como los siguientes:

Ejemplos:

1. $f(x) = -2x + 1$
2. $v(t) = 5t$
3. $g(x) = x^2$
4. $A(x) = \sqrt{2x - 2}$
5. $R(z) = \frac{1}{z+1}$
6. $P(x) = -x^2$

En cada caso:

- Se defina el dominio y rango
- Se evalué en números, como -2, 0, 1, 3, etc.
- Se evalué en variables como: $f(x - 1)$; $f(z + 3)$; $f(x + h)$
- Se obtenga un esbozo de su gráfica, mediante la unión de puntos.
- Si el tiempo es pertinente, hacer el estudio completo de la función lineal y la cuadrática.