Un problema con la concepción de la continuidad de una función

Miguel Delgado Pineda

miguel@mat.uned.es

Universidad Nacional de Educación a Distancia; UNED.

España

Resumen: En este trabajo se aborda la existencia de concepciones erróneas en los profesores de Matemáticas en lo relativo al concepto de función continua en un punto basadas en imágenes ejemplares no adecuadas. Si bien, la práctica docente pude ser correcta desde el punto de vista algorítmico y de rigor, puede ocurrir que las dificultades que experimenta el estudiante para comprender el concepto de continuidad puntual estén relacionadas con esas concepciones de su profesor. En numerosos casos se detecta la sustitución del concepto de continuidad global en un entorno por el concepto de continuidad puntual, cosa que representa una notable dificultad de aprendizaje.

Palabras clave: Continuidad, Límite puntual, Representación de una función, Matemática Visual, Dificultad didáctica.

1. Introducción

Un concepto fundamental para los estudiantes universitarios es el concepto de función continua entre dos espacios. Las funciones continuas son presentadas al estudiante dependiendo de la formación universitaria que debe adquirir. En general, esa formación debería ser susceptible de utilizar una definición u otra, dependiendo de la naturaleza de los espacios inicial y final que se empleen.

En la formación inicial de matemáticos se presentan distintas definiciones, coherentes entre sí, para describir la continuidad según el marco referencial; ya sea el espacio topológico, el espacio métrico o el espacio normado. Priorizar una definición ante otras, o tratar con todas, puede carecer de sentido dependiendo de los objetivos que se persigan con la formación del estudiante.

De cualquier forma, el concepto de continuidad de una función real de variable real está presente en todos los planes de formación de estudios universitarios de índole científico o técnico, y aparece en estudios universitarios catalogados como ciencia social. Además, este concepto es tratado en etapas educativas anteriores a la Enseñanza Universitaria, al menos queda descrito entre los objetivos en algunas modalidades de la Enseñanza Secundaria. Por ello, este trabajo se encuadra dentro del marco de las funciones reales de variable real que son susceptibles de ser catalogadas como función continua en algún sentido.

En Análisis Matemático (Cálculo Matemático) hay varias acepciones sobre la continuidad de una de estas funciones:

1. Una acepción global: Continuidad Global correspondiente al concepto de función continua en un conjunto abierto del conjunto de los números reales **R**. Es decir, una función tal que la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto es un subconjunto abierto. Sin embargo la imagen que se utiliza para introducírsela al estudiante, es que la gráfica de la función se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel en el caso que su dominio sea un conjunto conexo.
2. Otra acepción global: Continuidad Uniforme relativa al concepto de función uniformemente continua en un subconjunto de **R**. Es decir, una función tal que la variación de la función entre dos puntos está controlada por la separación de esos puntos, sean cualesquiera que sean esos puntos. En general no se suele aportar al estudiante una imagen precisa para interpretar la gráfica de este tipo de función, sin embargo se le indica que cualquier función continua en un intervalo cerrado es una función uniformemente continua.
3. Una acepción local: Continuidad Puntual que corresponde al concepto de función continua en un punto. Es decir, una función que verifica que el valor de la función en ese punto es igual al valor del límite de la función cuando la variable tiende a ese punto. En general las dificultades gráficas del concepto de límite, un concepto dinámico, impiden presentar unas representaciones gráficas adecuadas.

Esta última acepción es considerada básica en la enseñanza matemática universitaria.

En muchos libros universitarios actuales se presenta de forma habitual primero la definición de continuidad de una función en un punto relativa a un punto interior de un conjunto, en general, abierto. Después de este concepto se pasa regularmente a la conservación de la continuidad puntal al operar con funciones continuas, y se suelen presentar condiciones necesarias, condiciones suficientes, y condiciones necesarias y suficientes para asegurar la continuidad. En su defecto, se tiene la no continuidad en un punto o discontinuidad de la función en ese punto. Se puede decir que diversos autores eligen algunas de las caracterizaciones como definición de continuidad, si bien la más frecuente es la relativa al límite, bien como tal o bien en términos de épsilon-delta.

Se continúa con la continuidad global presentada como un subproducto obtenido de la afirmación de la continuidad en cada uno de los puntos de un subconjunto donde está definida o de todo **R**. Es decir, una función es continua en un conjunto si y sólo si es continua en cada uno de los puntos del conjunto.

Sin embargo, la continuidad uniforme queda relegada a su definición y a la constatación de algunas propiedades de algunas funciones continuas globalmente. De esta forma se destaca el resultado que asegura que si una función es continua en un conjunto compacto (cerrado y acotado), entonces es uniformemente continua en él. Aunque en algunos libros sólo se destaca este resultado restringiéndolo a intervalos cerrados.

En múltiples artículos se sostiene que este tipo de tratamiento de la continuidad desde la continuidad local a la continuidad global induce problemas de aprendizaje entre los estudiantes y por extensión a los universitarios. En [Aparicio, 2007] se presupone que la noción de continuidad global posee un carácter prioritario en la percepción del ser humano pues perciben el cambio en fenómenos reales en términos globales y no locales. Para ello, se toma como ejemplo lo que se observa de la trayectoria continua descrita por un objeto visible, donde se tiene la convicción de que ese objeto recorre todos los puntos intermedios de su trayectoria. Entendemos esta afirmación y la aceptamos, pero debemos destacar que la percepción visual humana se basa en la interpretación de ciertas imágenes instantáneas y estáticas que el cerebro procesa de forma independiente a modo de interpolación de imágenes para crear esa sensación de proceso continuo como se indica en [Delgado 2009].

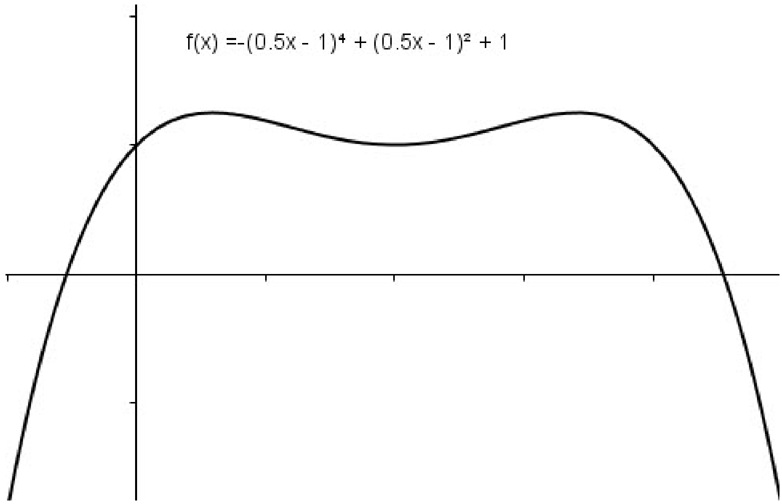

Figura 1. Traza continua de función continua global

Si bien aceptamos globalmente lo dicho en [Aparicio, 2007] mantenemos ciertas reservas ante estas posturas globales y debemos proponer un ejercicio a los estudiantes y a los profesores para que sea descrito en términos de continuidad. Se trata de: “Estudiar la situación lumínica de una habitación durante una hora, sabiendo que en un momento dado se encienda un foco luminoso y, pasado un tiempo, se apaga”. Nos preguntamos: ¿A qué idea se acude cuando se trata alguna de las acepciones descritas de continuidad aludidas?

Suponemos que en la práctica diaria emergen errores relevantes al cambiar unos significados por otros en cada una de esas acepciones. También suponemos que esos errores se producen tanto en los estudiantes como en los profesores, y esto sin excluir a investigadores de Matemáticas o de Educación Matemática.

2. La concepción de una función

Al redactar este artículo hemos querido situar al lector en el punto “ideal” inicial de partida, para lo cual nos basta con formular dos sencillas preguntas:

- ¿Cuál es la percepción que se tiene de una función? En [Aparicio, 2006] indican cuatro representaciones: una algebraica, una numérica, una geométrica, una icónica, y añaden una nueva descrita como verbal-gestual. Pues en algunos casos se hace referencia que a ciertos gestos (aspecto comunicativo) que facilita transmitir lo que es una función en general.

- ¿Cuál es la percepción de una función continua? En este caso también admitimos las cinco representaciones anteriores.

En el marco de funciones reales de variable real es frecuente que la percepción de función sea sustituida por la de función continua sobre todo en estudiantes universitarios de primeros cursos. Podemos asegurar que esa sustitución es independiente del tipo de representación que se emplee [Godino 2005]. Pudiera parecer sorprendente que esta sustitución también la hagan los profesores, sobre todo cuando se les solicita que aporten lo primero que se les ocurra al escuchar el concepto de función.

No nos cabe la menor duda de que una función continua sea un caso particular de función general, y por esa razón resulta que esa sustitución es válida en algún sentido. Podemos afirmar que es como una primera imagen portadora dentro de la cual se cifra (se encripta) el concepto de función válida dentro del marco de la Visualización Matemática como se expone en [Delgado 2003]. Ahora bien, nos preguntamos por la respuesta a la segunda pregunta de lo cual resulta interesante estudiar la percepción y representación de la continuidad que tienen tanto estudiantes como profesores.

3. La percepción de la continuidad de una función

Al preguntarse sobre los marcos referenciales donde aparece la función continua, destacamos que en Algebra universitaria aparece como elemento de un espacio vectorial o de un algebra no conmutativa sin aparente significado gráfico. En este caso, se dota al conjunto de funciones continuas de una algorítmica operatoria donde únicamente se concatenan expresiones escritas para transformarla en otras expresiones.

Ahora bien, cuando se escribe algunas de las siguientes expresiones como $x-y+2$, $2x-2y+2=0$, $x-y+2=0$, $3x-3y+2=0$, $x-y=-2$, $y=x+2$,

$x=-y-2$, $f(x)=x+2$, $g(y)=-y-2$, $h(3x)=3x+2$, … y otras similares, ¿cómo se sabe que tratamos o debemos tratar con una función? Acaso ¿hay una única forma de interpretar el texto con el cual se escriben sobre objetos matemáticos? Claramente desde el punto de vista algebraico la respuesta es negativa. En realidad, en muchos casos no se trabaja con las expresiones escritas, si no que se trabaja en un espacio cociente relativo a una relación de equivalencia de igualdad de esas expresiones. Por ejemplo, $f = x$ y $g = x^2/x$ son identificados en el dominio de integridad de polinomios, es decir son representantes de la misma clase del conjunto cociente relativo a la relación de equivalencia o igualdad ($[f] = [g]$ donde [ ] representa la clase a la que pertenece una función).

Sin embargo, en el marco de la Geometría la continuidad aparece como grupos de transformaciones que afectan al plano o espacio "euclídeo" u otros espacios en su totalidad. Aunque tradicionalmente suelen denominarse transformaciones o aplicaciones en lugar de funciones. Un ejemplo de una transformación continua lo representa un giro con centro en un punto P del plano o una simetría axial.

En este caso se suelen emplear expresiones y estrategias algebraicas para describir a los objetos y manipularlos. En realidad se hace una sustitución de objetos geométricos por otros algebraicos. Por ejemplo, se interpreta una recta en el plano como la clase de las ecuaciones lineales de dos incógnitas cuyos coeficientes mantienen la misma proporción. Así pues, $3x + 2y + 4 = 0$ y $12x + 8y + 16 = 0$ son dos ecuaciones correspondiente a la misma clase o recta ($[3x + 2y + 4 = 0]$). No cabe olvidar que las rectas suelen ser las gráficas de las primeras funciones reales de variable real que cualquier estudiante encuentra en su trayectoria académica, si bien se tratan con una expresión de la forma:

$$y = -\frac{3}{2}x - 2 \quad \text{o} \quad f(x) = -\frac{3}{2}x - 2.$$

El marco donde son más reconocibles las funciones continuas es en el del Cálculo Matemático. Estas funciones aparecen en distintos escenarios como: En análisis de variación de variables con cuestiones relativas a límites, derivada, representación gráfica y optimización. En el estudio de áreas en cuestiones de integración y optimización. En la definición de nuevas funciones como funciones definidas mediante la integral y funciones construidas punto a punto mediante el límite. Y en otros muchos, como por ejemplo las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, y ecuaciones integrales.

Sin embargo, en este marco hay tres acepciones sobre el adjetivo de continua como ya se ha indicado.

Numerosos trabajos como [Sierra Vázquez 2000], [Delgado & Ulecia 2009] y [Valls 2011] se describen las dificultades que tienen los estudiantes con cada una de las acepciones de continuidad, revelándose mayores dificultades en el concepto de continuidad de una función en un punto, sobre todo en los primeros cursos universitarios. Sin duda esa dificultad aparece en el instante que se trata con el concepto de límite. Suele ocurrir que al estudiante se le incrementan sus dificultades de estudio, y por tanto de comprensión, cuando en el estudio de la continuidad puntual se incorpora este concepto; el límite.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Más cuando comparan la definición de continuidad puntual y la del límite en el punto en términos métricos, (épsilon-delta). El estudiante tan sólo comprueba que en estas dos definiciones sólo hay una única diferencia escrita. En un caso aparece el valor del límite, l, que no sabe cómo determinarlo, y en el otro aparece el valor de la función $f(x_0)$ en el punto estudiado x_0 , que si sabe calcularlo.

- $\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0 \ y \ \forall x \ tal\ que \ |x - x_0| < \delta \ se\ verifica\ que\ |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0 \ y \ \forall x \ tal\ que\ |x - x_0| < \delta \ se\ verifica\ que\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Además, en el cálculo práctico de límites se le suele indicar que sustituya el valor x_0 por la variable que hay en la expresión afectada por el límite para ver qué sucede y decidir qué hacer. En definitiva, se le aportan regla pero no ideas ni imágene.

Ante tal avalancha de dificultades puede ocurrir que el estudiante opte por una sustitución por otra acepción de continuidad, quedando el concepto de continuidad global como la acepción predominante que sirve para imaginar todo en lo relativo a funciones continuas. Al menos, el estudiante cree disponer de una buena forma de reconocer esto visualmente como en la Figura 1.

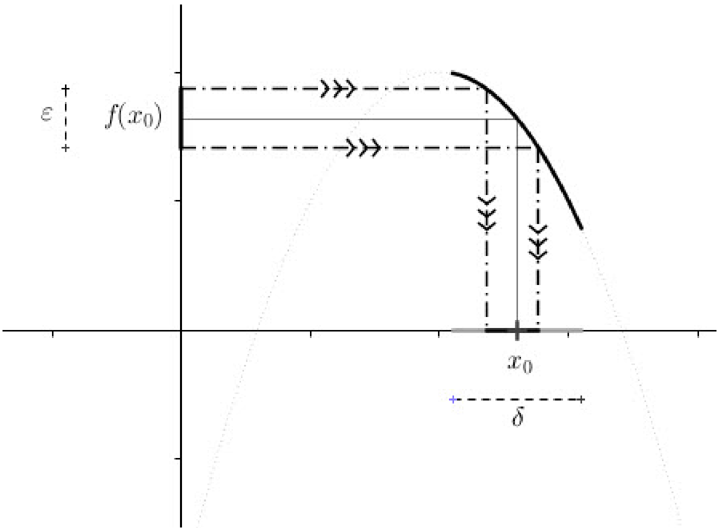

Figura 2. Imagen de continuidad global en un entorno que sustituye a la de continuidad puntual

De forma análoga a la sustitución en el concepto de función, esta sustitución se produce independiente del tipo de representación empleada. Si esto ocurre, aparece un “problema de conocimiento” que suele perdurar mucho en el tiempo y prolongarse en la vida profesional del estudiante una vez acabada su etapa de formación inicial. Así pues, destacamos:

- ***Problema 1***: Consiste en identificar de la continuidad de una función en un punto con la continuidad global de la función en un intervalo abierto, tan pequeño como se desee, que contiene a ese punto; en un entorno. Es decir, la imagen predominante en la continuidad puntual es la correspondiente a la Figura 2 como producto de este problema.

  Esto conlleva al convencimiento de que desaparece la necesidad del límite para tratar con la continuidad puntual.

Este primer problema puede acarrear a un segundo problema en algunos casos, que describiremos a continuación.

- ***Problema 2***: El Problema 1 sigue activo en el docente de alguna materia relativa a las Matemática. Es decir, el docente sigue identificando la continuidad puntual con la continuidad en un entorno del punto, aunque escriba correctamente las definiciones al discente.

Se puede decir que el Problema 2 pude parecer inactivo si la labor docente está restringida a unos ciertos entornos académicos, por ejemplo, en la mayoría de las profesiones científico técnicas basta en muchos casos tratar con la continuidad global.

El Problema 2 es bastante serio en un docente puesto que su labor genera una estela de desconocimientos en sus estudiantes, por ello destacamos un nuevo problema.

- ***Problema 3***: La población de estudiantes, o futuros estudiantes, con el Problema 1 activo se incrementa debido a que el docente genera una enseñanza incorrecta al no ser consciente del Problema 2

Consecuencia del Problema 3 es que un nuevo estudiante pasa a engrosar la muestra que se utiliza para determinar los estadísticos que muestran la dificultad que tiene el estudiante ante conceptos “tan abstractos” como límite puntual y continuidad puntual. Estos estadísticos parecen avalar aquellos trabajos de investigación de Matemáticas Educativas donde se focalizan las dificultades únicamente en el estudiante, y hacen pensar en la necesidad de variaciones de metodologías introductorias para estos conceptos, objeto muy fecundo en la investigación con distintas muestras de estudiantes en todo el planeta.

4. Descripción del estudio relativo a concepción de la continuidad del profesor de Matemáticas

En este trabajo tenemos el objetivo de aportar algunos ejemplos sobre las concepciones de la continuidad en un punto de profesores, o estudio de casos.

Esperamos que este trabajo pueda servir para que en futuros trabajos de investigación educativa sobre las percepciones de los estudiantes sobre los límites y sobre la continuidad de una función, se establezcan una hipótesis que balancee las responsabilidades de los errores conceptuales entre el estudiante y el profesor. Es decir, que en próximos trabajos se estudie a los profesores que interactúan con los estudiantes antes de que se estudiar la muestra de estudiantes de esas investigaciones, puesto que las concepciones del profesor influye y pudiera ocurrir que el estudiante tenga determinada concepciones “supuestamente erróneas” sobre límites y continuidad en un punto como consecuencia de las concepciones incorrectas del profesor.

En este trabajo se hace uso de la Visualización Matemática sobre los objetos matemáticos que son analizados, descrita en [Delgado 2009]. Ya se sabe que este tipo de visualización no es un proceso universal ni atemporal. En esta sentido el proceso de visualización de una persona consiste, esencialmente, en la generación de imágenes concretas, como caso particular, pero que contiene información (textual matemática) codificada. Una imagen portadora, que algunos llaman imagen mental, puede ser válida para uno y no serlo para otro, puesto que unos sumergen más información que otros en esa imagen. Por ello, es claro que un estudiante generará una imagen distinta de la del profesor al tratar las funciones continuas, y el problema principal de docente consiste en aportar alguna imagen portadora accesible al discente que pueda adoptar, de forma que éste pueda actuar con ella. Al menos inicialmente, hasta que complete su proceso de visualización.

Una vez generada una visualización adecuada a un cierto nivel de comprensión matemática, se puede pensar que tal visualización es válida para siempre. Sin embargo, la realidad se impone día a día y, ante nuevos retos o nuevas funciones, nos vemos obligados a cambiar de imagen, o a cambiar los protocolos de codificación y decodificación sobre imágenes. Este hecho no sólo no tiene connotación negativa alguna pues describen la génesis de la forma de comprender el discurso matemático. Además, las imágenes portadoras de una visualización anterior siguen siendo válidas si se restringe al nivel para el cual se generó. Si se renuncia a afrontar nuevos retos que inducen a la generalización de los objetos matemáticos pudieran aparecer problemas similares a los mencionados con anterioridad. Pero, renunciar a retos es una cosa que ni el estudiante universitario ni el profesor pueden hacer en los procesos de aprendizaje-enseñanza-aprendizaje.

Para poder acceder a la imagen portadora del profesor, y por tanto a la conceptualización de éste o a su tipo de representación, basta con realizar dos preguntas únicamente. Una batería más extensa de preguntas podría ser interesante, sin embargo esta podría hacer que el profesor no se prestase al estudio. Estas dos preguntas se hacen en un momento en el cual no está enseñando a sus estudiantes, en un momento de relax del profesor para, así, poder evaluar la presencia de los problemas mencionados. Ese fue nuestro experimento.

Las preguntas siempre se formularon dentro de un marco académico o investigador, bien en un centro educativo o bien en algún congreso o encuentro matemático. Es conveniente que el profesor se sienta en relax pero en relación con las Matemáticas en un marco real y matemático.

Antes de captar los datos para la investigación, se aborda al profesor y se le pide permiso para almacenar en vídeo sus respuestas de forma digital (mp4 por su poco peso en bytes), respuestas a dos simples preguntas. Para facilitar su colaboración, se complementa la información con que:

1. Probablemente, las respuestas no le ocupará más de dos o tres minutos. Pero podría utilizar más tiempo si lo consideraba necesario hasta cinco o seis minutos, recomendable. Aunque podría emplear todo el tiempo que necesitara.
2. Se le formularían dos preguntas. Primero una pregunta, tras su primera respuesta, la otra.
3. Las preguntas son sencillas y de Matemáticas iniciales.
4. No se le podía indicar nada sobre el contenido de las preguntas hasta el momento de la grabación.

Entendemos que la información inicial hizo que se pudiera realizar la experiencia, teniendo en cuenta que se grababa todo. De los profesores que contactamos, sólo uno denegó su colaboración.

Realizaron la experiencia más de 50 profesores universitarios con docencia en asignaturas de Matemáticas. En su mayoría eran profesores de varias facultad de Ciencias; Matemáticas. Intervinieron en la experimentación más de 25 estudiantes que acababan de finalizar el Máster de Educación en Enseñanza Secundaria de las universidades españolas; UNED y Alcalá de Henares, y unos 10 profesores de Enseñanza Secundaria. Esta muestra de “matemáticos” se incrementó con más de 15 profesores universitarios de otras especialidades de Ciencias, como Físicas, Químicas, o de Ingeniería. Estos profesores no impartían asignatura de Matemáticas alguna, pero habían tenido una importante formación matemática y la usaban como herramienta en su docencia y su investigación.

La nacionalidad de estos colaboradores era española en su mayoría, si bien intervinieron unos 10 profesores de nacionalidad portuguesa, dos norteamericanos, dos mexicanos, dos chilenos y un inglés.

Si bien el grado de colaboración fue total, debemos destacar que casi todos los profesores intentaron saber el contenido de las preguntas antes de la grabación. Aludían que al quedar grabada su contestación querían dar una respuesta adecuada de un profesor y, por tanto, la correcta. Se les decía que precisamente eso era lo que no podíamos hacer pues necesitábamos su respuesta directa, sin condicionamiento alguno. Al instante lo aceptaban y se les indicaba que las grabaciones no se colgarían en un servidor de vídeo, ni se harían públicas, ni se les daría a terceros investigadores. Sólo servían para la investigación en curso.

Se intentó siempre formular las dos preguntas de la misma forma y en similares condiciones de privacidad. Presumiblemente, estas condiciones hicieron que el profesor quedara contento al finalizar, y que muchos se sorprendieran de que fuera tan corta. Sin embargo, el tiempo empleado sólo dependía de él.

Después de unas cinco grabaciones, se decisión que el entrevistador no mirara directamente al interlocutor, y sólo mirara a la pantalla de la cámara. Esta decisión intentaba evitar alguna retroalimentación gestual al colaborador, pues los primeros utilizaron coletillas retóricas como ¿bien?, ¿no? y otras. Estas nunca tuvieron contestación oral, pero para evitar algún gesto se les miraba vía cámara.

Entre las situaciones anecdóticas cabe destacar que sólo un profesor no contestó a ninguna de las dos preguntas agotando el tiempo de grabación e igualmente hizo un único estudiante de máster. Además, otro profesor preguntó nada más escuchar la primera pregunta: ¿Pero por qué me haces esa pregunta? eso no ¡No!, ¿y la otra? Y al escucharla se negó en redondo a que se siguiera grabando y "huyó" de la grabación.

Las preguntas formuladas son:

Pregunta 1: ¿En qué piensa al oír hablar de una función continua en un punto?

Pregunta 2: ¿En qué piensa al oír hablar del límite de una función en un punto?

Con la primera pregunta se intenta comprobar la imagen portadora del concepto de continuidad que tenga el entrevistado y en qué medida se hacen visibles los problema 1 y 2.

En pocos casos se nos preguntó si era la definición lo que pedíamos, y sólo se les respondió: "en lo que piensa ahora mismo". Sin pensarlo más, esos mismos pasaron a exponer oralmente la definición en términos métricos.

Con la segunda pregunta se intenta comprobar si la respuesta con su posible imagen portadora tenía relación con la respuesta anterior y con su imagen de la continuidad puntual. De esta forma se refuerza la visibilidad de los problemas 1 y 2. De esta pregunta nunca se pidió aclaración.

5. Una muestra reducida relativa sólo a profesores de distintas procedencias

En este apartado sólo expondremos un pequeño estudio de casos de seis profesores universitarios de distintas localizaciones geográficas que imparten algún tipo de docencia matemáticas y un profesor que imparte docencia no matemática en Física. Casi todos tienen más de 5 cursos de experiencia docente y algunos muchos más, y a todos se les preguntó en los momentos lúdicos que dejan las sesiones de un congreso matemático.

A continuación se describen las respuestas que dieron:

- Profesor A: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Barcelona. Edad: entre 30 y 40 años) A la pregunta primera responde "en una línea continua". Ahora bien, añade que piensa en una que tiene derivadas por la izquierda y la derecha y que son iguales. Mientras que en otra pregunta responde que sólo piensa en la expresión escrita usual, en nada más.
- Profesor B: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Alicante. Edad: entre 35 y 45 años) La primera pregunta responde "que le recuerda que debo dar clase", mientras que la segunda "que le recuerda impartiendo clase". Son de las respuestas más breves.
- Profesor C: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Lisboa. Edad: entre 50 y 60 años) A la pregunta primera responde "que en piensa en tres cosa poder describir ninguna concreta pues se mezclan", si bien gesticula mucho intentando dibujar algo que hace juntarse los dedos en el aire. Asegura que es difícil de contestar. Mientras que en la segunda indica "que piensa en muchas fórmulas y algunas gráficas".
- Profesor D: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Bilbao. Edad: entre 25 y 35 años) Responde de forma muy breve después de pensar a la primera pregunta indicando que "piensa en los límites", mientras que a la segunda responde que "es lo mismo".
- Profesor E: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Madrid. Edad: entre 40 y 45 años) Responde que está pensando en la definición de una función continua y hace una referencia a las imágenes de los términos una sucesión que converge al punto. Gesticula con las dos manos haciendo describiendo unos intervalos que se contraen.

Respecto a la segunda pregunta sólo indica que le estoy formulando una pregunta muy difícil.

- Profesor F: (Docencia: Matemáticas. Universidad en Londres. Edad: entre 60 y 70 años) Entiende que la contestación se corresponde con la definición de continuidad, si bien indica que él enseña el concepto de continuidad empleando la caracterización de una función continua por sucesiones. Respecto a la segunda pregunta indica que esencialmente es lo mismo y continúa con la definición análoga a la dada. Estas respuestas son de las que más tiempo ocupan.
- Profesor G: (Docencia: Físicas. Universidad en Madrid. Edad: entre 25 y 35 años) A la primera responde diciendo "que permanece antes y después de ese punto tanto en el espacio como en el tiempo". La segunda respuesta es "a lo que tiende esa función en dicho punto pero no la alcanza".

Entendemos que el profesor es una autoridad académica para el estudiante, además, y suponemos que al imparte su docencia con el rigor adecuado. También, entendemos que esta pequeña muestra indica que los errores de conceptualización de los estudiantes no son independientes de las actuaciones y concepciones de los profesores y, de alguna forma, las transmite al dejar claro cómo piensa al afrontar algunos ejercicios no algorítmicos.

Se observa que los tres problemas están presentes en tan pequeña muestra de profesores, así pues, se deben estudiares las concepciones erróneas de los estudiantes, y deben ser interpretadas en términos de verificación de los problemas 1, 2 y 3.

Una cuestión que se comprobó en esta experimentación es que los profesores no entendieran que se les hicieran preguntas del curriculum fuera del aula, sin poder mediar con una pizarra, papel u cualquier otro medio de comunicación, donde sólo les queda el discurso o la gesticulación directa y un interlocutor que conoce lo que escucha. Parecería que determinadas cuestiones y pensamientos quedan circunscritos al ambiente académico únicamente, desmarcadas de la realidad. Además, en muchos casos destacaban lo difícil de sólo emplear un discurso oral sin apoyos mediáticos.

6. Una ampliación de la muestra de profesores

Aunque la muestra anterior puede ser suficiente para que aflore lo que queremos en este apartado, la ampliación en relación a preguntamos si los profesores traducen sus concepciones mediante imágenes portadoras que pudieran verificar algunas de las cinco clases de representaciones de [Aparicio 2006].

- Profesor H: (Docencia: Matemáticas. Universidad A de Madrid. Edad entre 35 y 45 años) En la pregunta primera indica que "piensa en todos los movimientos que realizamos, en la realidad, son funciones continuas". Mientras que para la segunda pregunta responde "en la gráfica del libro de Spivak con el cual yo aprendí el concepto…" (suponemos que se trata del libro Calculus) y añade más adelante en su discurso "… se debe dibujar sin levantar el lápiz del papel".

Consideramos que la idea transmitida responde a la clase de representación geométrica en cuanto a la pregunta primera mientras que la segunda respuesta se corresponde con una representación icónica. Clara aparición del Problema 1.

- Profesor I: (Docencia: Matemáticas. Universidad A de Madrid. Edad entre 55 y 65 años) Responde a la primera pregunta con "una función que llega por un lado y sale por otro", mientras que a la segundad pregunta indica "como se aproximaría una función en un punto" y añade que no es una cuestión fácil de expresar. Remarca la palabra aproximación.

En este caso la primera idea transmitida se corresponde con una representación verbal-gesticular, mientras que la segunda corresponde a una representación numérica aunque el mensaje sea oral. Nuevamente, clara aparición del Problema 1.

- Profesor J: (Docencia: Matemáticas. Universidad A de Madrid. Edad entre 55 y 65 años): La primera pregunta es respondida con "pienso en el límite", mientras que a la segundad pregunta responde "pienso en la tangente".

La primera respuesta está dentro del tipo de representación algebraico mientras que la segunda respuesta se corresponde en cierta medida a una representación geométrica, si bien esta imagen se corresponde con el concepto de derivada en un punto.

- Profesor K: (Matemáticas Docencia: Matemáticas. Universidad A de Madrid. Edad entre 55 y 65 años) Responde a la primera pregunta: “que se puede describir, representar gráficamente la función sin levantar el lápiz del papel en un entorno del punto”, mientras que a la segundad indica: “en que los valores de la función en un entorno del punto, incluido el punto, se van a acercar a un valor determinado”.

Claramente las dos respuestas dadas se corresponden con una representación verbal gestual si bien queda reflejada cierta parte de representación numérica. El Problema 1 queda al descubierto.

De los siete primeros profesores no indicamos el tipo de representación a las que aluden en sus respuestas puesto que pertenecen a varias universidades y podría pensarse que es difícil encontrar esos tipos de representaciones juntas en un mismo lugar.

La ampliación de la muestra la hemos realizado con profesores que son de una misma universidad, y más aun, el mismo departamento. Como resultado de esta ampliación se comprueba que han aparecido, en un entorno muy reducido, las cinco representaciones que se destacan en estudiantes; algebraica, numérica, geométrica, icónica, y verbal-gestual.

7. Conclusiones

Este estudio particularizado en la continuidad indica que en el conjunto de situaciones erróneas que generan una dificultad didáctica en los estudiantes, no se puede descartar el estudio de las concepciones de los profesores. Al menos en lo concerniente a las funciones continuas esto ha quedado reflejado puesto que algunos profesores universitarios emplean una imagen portadora del concepto que pudiera producirse problemas en sus estudiantes: Que se identifique la continuidad global en un entorno de un punto y una imagen correspondiente, como continuidad en un punto. Así la continuidad queda en un juego de tipo algebraico de curvas. En la Figura 3 se presenta una imagen aproximativa de una función que está definida en todo **R** y sólo posee límite en dos puntos de la recta real. Además, sólo es continua en esos dos puntos, y no hay entorno alguno de esos puntos donde se pueda hacer una gráfica continua globalmente.

Si un profesor transmite la anterior concepción, entonces el estudiante parece no entender la necesidad de tratar con límites, y en consecuencia, el trabajo con límites se transforma en algo totalmente metódico y algorítmico. Esto hace aumentar la población de estudiantes que no entenderán otra cosa al trabajar con la continuidad.

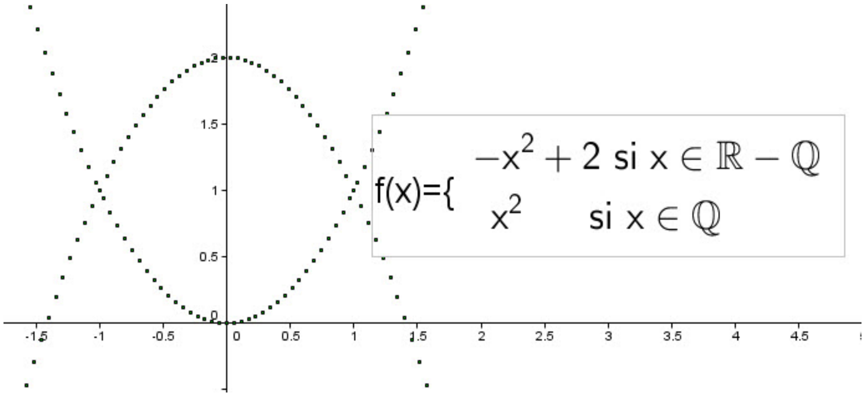

Figura 3. Función continua únicamente en dos puntos; -1 y 1

Si bien existen muchos trabajos de investigaciones que han buscado añadir al discurso académico algunos elementos tecnológicos que no restrinjan la práctica del estudiante al tratamiento de los procesos algorítmicos, bien numéricos o bien algebraicos. La realidad es que esas estarán igualmente mediadas por las concepciones de los profesores, si es que son asumidos y adoptados por ellos. Así pues, esos estudios deberían iniciar su andadura con los profesores antes que con los estudiantes.

Todo nuevo medio tecnológico tiene potencialmente posibilidades educativas que los profesores pueden generar, pero lo primero será que ellos los utilicen para autogenerar otras imágenes portadoras propias. En caso contrario, se estará cambiando de medio sin "entender" los conceptos.

Bibliografía

- Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(1), 7 – 30.*
- Aparicio, E., Cantoral, R. (2007). La formazione della nozione di continuità puntuale presso gli studenti dell'università. Un approccio socioepistemologico. *La Matematica e la sua Didattica*. Pitagora Editrice Bologna, Italie. Anno 21, n. 2, 163 - 196.
- Delgado Pineda M. (2009). Objetos Matemáticos dentro del marco de una Matemática visual. Memorias del Simposio de Educación Matemática SEM 2009. EDUMAT. Argentina. 2009.
- Delgado Pineda M.; Ulecia García T. (2009). Visualización en el Análisis Matemático: Aprendizaje Matemático basado en el tratamiento de imágenes dinámicas que posibilitan el modelado de objetos de esta área del conocimiento. Memorias del Simposio de Educación Matemática SEM 2009. EDUMAT. Argentina.
- Godino J.D.; Wilhelmi M.R. & Bencomo D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4(2), 21-26
- Sierra Vázquez M.; González Astudillo M.T.; López Esteban C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 3, Nº. 1, 2000, págs. 71-86
- Valls, J.; Pons, J. & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión de límite de una función. Enseñanza de las Ciencias, 29(3), 325-338.