La diferencial de área. Una perspectiva infinitesimalista

José Ismael Arcos Quezada, Diana Itzel Sepúlveda Jáuregui
Facultad de Ingeniería, UAEMéx; Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH
México

Resumen. En un curso tradicional de cálculo, en escuelas de ingeniería, el concepto de integración se introduce generalmente a partir de sumas de Riemann. Luego, al abordar el asunto de la integral doble o integral de área, se vuelve a recurrir a sumas de Riemann sobre una región inicialmente rectangular, dando lugar a la así denominada integral iterada, en la que "aparece" en el integrando, ya sea $dy\,dx$ o $dx\,dy$, pero no se indica que se trate del producto de las diferenciales de las variables. Esta y otras situaciones en la forma de presentar la integral doble provoca que el estudiante generalmente termine por mecanizar el cálculo de una integral "doble" (y después de la "triple"), sin tener una idea clara sobre lo que se está haciendo y sobre el significado geométrico de esa "dA". Si se aceptaran los infinitesimales más o menos de la manera en la que fueron concebidos por Leibniz y sus seguidores, el asunto se simplificaría considerablemente, sobre todo si tomamos en cuenta la disponibilidad de un software libre como geogebra, el cual puede utilizarse para hacer una argumentación visual.

Palabras clave: Enseñanza del cálculo, cálculo leibniziano, cálculo en escuelas de ingeniería

1. Introducción

Al analizar los textos usados para la enseñanza en las escuelas de ingeniería se puede observar, por un lado, que en aquellos destinados a la enseñanza de las ciencias, las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales siguen siendo utilizadas, sobre todo en el proceso de modelación.

Por otro lado se observa que los infinitesimales, al menos como cantidades fijas, no son utilizadas, de hecho, ni siquiera se mencionan en los textos usados para la enseñanza del Cálculo, de manera que el estudiante encuentra que aquel Cálculo que aprendió en los primeros semestres no es el mismo que normalmente es aplicado en los cursos posteriores.

Ahora bien, la diferencial, como incremento infinitamente pequeño, era el concepto fundamental en el Cálculo leibniziano. Sin embargo, al cabo de poco más de un siglo, cuando las cantidades infinitamente pequeñas fueron desechadas del Cálculo, se hizo lo mismo con la concepción infinitesimalista de la diferencial, y ahora, como sabemos, esta se presenta en los textos de Cálculo como una cantidad finita que resulta del producto de la derivada de la función en un punto y un incremento de la variable.

Esta concepción de la diferencial, que encontramos en los textos actuales de Cálculo, está más bien relacionada con la aproximación lineal del incremento, idea que también resulta muy útil en el estudio de las ciencia básicas y de la ingeniería, por lo que debe formar parte de la temática de los cursos de Cálculo, siempre y cuando se establezca claramente la diferencia con la concepción original de la diferencial.

Por otra parte, al estudiar las ciencias de la ingeniería resulta conveniente contar con un significado geométrico para cada una de las diferenciales, según el objeto geométrico sobre el que se integren (sumen) las diferenciales (elementos): dx si se tienen elementos de una recta o un segmento rectilíneo, dr si se tienen elementos de un arco curvilíneo, dA si se tienen elementos de una región en el plano, dS si son partes infinitamente pequeñas de una superficie, y dV si son elementos de una región sólida.

2. Los infinitamente pequeños. Aceptarlos o no

Desde hace más de dos milenios, los matemáticos griegos comenzaron a enfrentar la problemática relativa a lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. A ese respecto, de acuerdo con González (1992), Anaxágoras fue uno de los primeros en manifestar su pensamiento:

> Anaxágoras de Clazomene (500-428 a. C.) establece que "…en lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño, […]. De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande,…".

Así, al negar la existencia de lo "extremadamente pequeño" se percibe un rechazo en aceptar las *cantidades infinitamente pequeñas*, observándose algo que dará lugar a la expresión *cantidad tan pequeña como se quiera*, tan familiar en nuestros tiempos. Por el contrario, Antifón, *el sofista*, las aceptaba, ganándose por ello las críticas de Aristóteles, quien refiriéndose a la argumentación de Antifón respecto de la cuadratura del círculo, decía:

> […] Dado un círculo, Antifón parte de un polígono regular, por ejemplo, un triángulo o un cuadrado, inscrito en él. Sobre cada lado del polígono construye un triángulo isósceles, obteniendo un polígono regular del doble de lados, y repite la operación continuamente […] "Antifón piensa que de esta manera el área [del círculo] podría ser cuadrada, ya que después de un número de veces [de realizar la operación de duplicar los lados del polígono] tendremos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados debido a su pequeñez coincidirán con la circunferencia del círculo. Y puesto que para cada polígono podemos encontrar un cuadrado equivalente, […], estamos en disposición de conseguir un cuadrado igual al círculo.
> […] Eudemo, discípulo de Aristóteles, aduce que Antifón infringe el principio de que «*las magnitudes son divisibles sin límite*». Siendo el área del círculo «*divisible sin límite*», el proceso descrito por Antifón nunca alcanzará a todo el área, por tanto, los lados del polígono inscrito se acercan «*en potencia*» a la circunferencia, pero nunca ocuparán «*en acto*» la posición de la misma.

Así pues, podemos afirmar que, en buena medida, la discusión sobre lo infinitesimal se centraba en torno a aceptar o no que *llegaba* un momento en el que se pudiera afirmar que se tenía una situación distinta a la que se tiene en *condiciones normales*. En el caso del círculo y los polígonos inscritos en un círculo, por ejemplo, el asunto es aceptar, o no, que dada su *infinita pequeñez*, el arco de cada sector circular puede ser considerado, *exactamente* (o bien, con un error infinitamente pequeño) como un segmento rectilíneo.

Cuando se manifiesta tal aceptación se estará hablando de un *infinito actual*, mientras que si se afirma que el arco nunca deja de ser curvo, entonces se habla de un *infinito potencial*.

Ese pensamiento infinitesimalista, basado en la aceptación del infinito actual, permitiría, muchos siglos después, arribar a muchos resultados de manera más simple que como lo hicieron los matemáticos griegos.

En el caso de la cuadratura del círculo, por ejemplo, y siguiendo la argumentación de Antifón, tendríamos que (ver figura 1), si se acepta que llega el momento en el que los segmentos circulares son triángulos rectilíneos, cada uno de estos tendría una altura igual al radio del círculo y una base infinitamente pequeña, de longitud Δs .

Si todos estos triángulos se dibujan con sus bases alineadas (como desenrollando el círculo) y con el tercer vértice en el mismo punto (que podría ser el centro del círculo), se obtendría un triángulo con base igual al perímetro del círculo y altura igual al radio del mismo, lo que resulta ser una de las proposiciones de Arquímedes en *La cuadratura del círculo*.

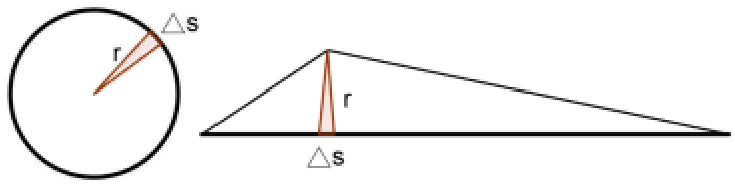

Figura 1. Cuadratura del círculo aceptando los infinitesimales

Sin embargo, la forma de pensar dominante en esa época era más bien contraria a lo infinitesimalista, ya que en la aceptación del *infinito actual* se veía una falta de rigor. Así, argumentaciones como la de Antifón eran tachadas de poco formales por lo que las afirmaciones que tuvieran lugar de esa manera no resultaban admisibles.

3. Concepción infinitesimalista de las curvas en el Cálculo leibniziano

En sus orígenes, a finales del siglo XVII, el Cálculo leibniziano se presentaba generalmente en un contexto geométrico, aunque desde el primer escrito de Leibniz se manifestaba ya la potencialidad de la nueva herramienta para abordar y resolver problemas de la Física.

En aquel Cálculo, un recurso básico era la concepción infinitesimalista de las curvas, viéndolas como poligonales con una infinidad de lados, cada uno de ellos infinitamente pequeño. Esta manera de ver las curvas, entre otras ventajas, permitía dar una definición sencilla de la recta tangente. Por ejemplo, Leibniz (1684), en su “nuevo método de máximos y mínimos...”, decía:

> Encontrar la *tangente*, es trazar una recta que une dos puntos de la curva, separados una distancia infinitamente pequeña, o bien, prolongar el lado de un polígono de un número infinito de ángulos, lo que para nosotros es equivalente a una *curva*...

Al considerar además de lo anterior algunas reglas para operar con cantidades finitas (números reales), en combinación con infinitesimales y cantidades infinitamente grandes, se obtenía una herramienta sumamente poderosa para el estudio de las curvas.

Uno de los seguidores de Leibniz, el Marqués de L’Hôpital, cuando escribió su *Análisis de los infinitamente pequeños* (1696), anunciaba desde el mismo título que la obra tenía un carácter didáctico, indicando que era “para el entendimiento de las líneas curvas”.

Si bien se ha señalado que L’Hôpital publicó más que su propio trabajo, aquel que le comunicaba Johann Bernoulli, la redacción y organización del contenido del *Análisis*, que cabe esperar, si se deban al Marqués. En esta obra, la primera definición se refiere a las cantidades constantes y variables, y en la segunda ya define la *diferencia*:

> La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la *Diferencia*. Sea *AMB*, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea *AC* y como una de sus ordenadas a la recta *PM*, y sea pm otra

ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido esto, si se trazan *MR* paralela a *AC* y las cuerdas *AM* y *Am*, y luego se describe, con centro en *A* y radio *AM*, el pequeño arco de círculo *MS*, entonces *Pp* será la diferencia de *AP*; *Rm* la de *PM*; *Sm* la de *AM*, y *Mm* la del arco *AM*. Análogamente el pequeño triángulo *MAm* que tiene como base al arco *Mm* será la diferencia del segmento *AM*, y el pequeño espacio *MPpm* será la diferencia del espacio comprendido por las rectas *AP* y *PM*, y por el arco *AM*.

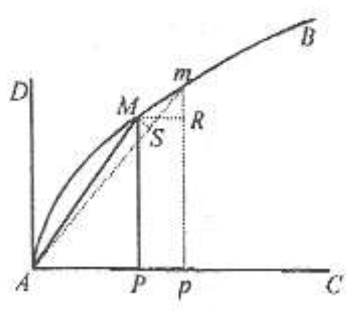

Figura 2. La diferencial en el texto de L´Hôpital

Con la lectura de este párrafo se pueden hacer varias observaciones, una muy interesante es que la definición dada para la *diferencia*, y la figura anexa, nos llevan a establecer, de manera muy sencilla, las expresiones correspondientes a los elementos de arco y de área bajo la curva. En el caso del arco *AM*, cuyo incremento es el arco infinitesimal (y, por lo tanto, rectilíneo) *Mm*, tenemos que: $d(\text{arco } AM) = \text{arco } Mm = ds = \sqrt{MR^2 + Rm^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. En el caso del área bajo la curva: $d(\text{área } APM) = \text{área } (PpmM) = Pp \cdot PM + MR \cdot \frac{Rm}{2} = ydx + dx\, dy/2,$ y como el segundo término es un infinitesimal de orden 2, obtenemos el resultado final, es decir $dA = y\,dx$.

En cuanto a las operaciones aritméticas entre cantidades finitas e infinitamente pequeñas, L'Hôpital propone algunos postulados, el primero de los cuales dice:

I. Requerimiento o suposición (postulado)
§2. Se pide que se puedan tomar indistintamente una por otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, puede considerarse como que permanece siendo la misma…

Es mediante este postulado que en una suma pueden "despreciarse" todos los términos que sean infinitamente pequeños respecto de otros, que serán los que permanezcan en la suma. Por otra parte, en la definición podemos observar que la diferencial (o diferencia) de una variable era la medida de un cambio infinitesimal de la misma, y que la variación continua de una variable se podía interpretar como una variación con "saltos" infinitesimales. Esta situación aparentemente contradictoria se describirá siete décadas después con más claridad, en el *Cálculo infinitesimal* de Bezout (1768), ya que en este se define *diferencial* como sigue:

Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama *diferencial* de esa cantidad.

Utilizando una simbología actual, podemos decir, de acuerdo con Bezout, que si tenemos una función definida mediante $y = f(x)$, y x cambia su valor desde x hasta $x + dx$, siendo dx infinitamente pequeño, entonces el cambio en el valor de la función, que suponemos debe ser infinitesimal (¿por qué no habría de serlo?) estará dado por $dy = f(x + dx) - f(x)$. Esta manera de ver la definir la diferencial facilita mucho las cosas en el aspecto operativo.

4. La diferencial en los textos de cálculo, hasta la primera mitad del siglo XX

Las críticas sobre una supuesta falta de rigor en las ideas del Cálculo basadas en la aceptación de las cantidades infinitamente pequeñas tuvieron lugar desde la aparición de tales ideas. En el caso de las versiones del Cálculo de Leibniz y Newton, ambas tuvieron detractores.

A lo largo del siglo XVIII fue creciendo la presión por elaborar una presentación del Cálculo en el que los infinitamente pequeños y otras concepciones igualmente señaladas como no rigurosas. De esta manera la concepción de diferencial como un incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable fue gradualmente abandonada en los textos de Cálculo.

Así, en los albores del siglo XIX, Lagrange, en su *Teoría de las funciones analíticas*, ni siquiera define la diferencial, sin embargo Lacroix (1837), quien de alguna manera escribe su texto con base en el modelo lagrangiano (lo que implica el recurso extensivo del desarrollo en series de potencias), indicaba:

> …tomaré como ejemplo la función $u = ax^3$. Poniendo $x + h$ en el lugar de x y restando la cantidad ax^3 del resultado, se ha obtenido, en la expresión
>
> $$u' - u = 3a^2x + 3ax^2 + ah^3,$$
>
> … el primer término $3ax^2h$ de esta diferencia, que no es sino una porción de la misma, se llama diferencial, y se le designa por *du*…

Vemos, pues, que en el desarrollo en serie de potencias (o serie de Taylor) para expresar el incremento de la función (al que llama diferencia), reconoce al primer término del desarrollo como la diferencial, es decir, ve a la diferencial (de la variable dependiente) como la aproximación lineal del incremento, que es como se presenta en los textos actuales de cálculo. Por supuesto, tanto *h* como *du*, los incrementos de las variables, son cantidades finitas.

Más tarde, cuando Cauchy escribió su *Análisis* (1823), tampoco recurrió a los infinitesimales como cantidades fijas, sin embargo siguió empleando una terminología infinitesimalista, aludiendo a los infinitamente pequeños siempre que una variable tendiera a cero. De esta manera, para definir la diferencial indicaba:

> Sean como siempre $y = f(x)$ una función de la variable independiente x, i una cantidad infinitamente pequeña, y h una cantidad finita. Si se hace $i = \alpha h$, α será también una cantidad infinitamente pequeña y se tendrá la identidad
>
> $$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h}$$, de donde se concluirá
>
> (1) $$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h$$
>
> Cuando la variable α se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad h permanece constante, el primer miembro de la ecuación (1) converge hacia un límite que es llamado la diferencial de la

> función $y = f(x)$. Se indicará esta diferencial por la característica *d*, (…) así que $d\ f(x) = h\ f'(x)$.

Como puede observarse, como en el caso de Lacroix, identificamos aquí a la diferencial como una aproximación lineal del incremento, sólo que ahora Cauchy remarca el carácter finito del incremento de la variable (y, por lo tanto, de la función).

Ahora bien, aun cuando Cauchy escribió su *Análisis* en la década de los mil ochocientos veinte, los autores de textos para la enseñanza del Cálculo siguieron recurriendo durante todo el siglo XIX a las versiones de Leibniz, Newton y Lagrange, incorporando ocasionalmente algunas de las ideas de la propuesta de Cauchy. Ello podía ocurrir, incluso, en el mismo texto, de manera que, hasta principios del siglo XX, distintas presentaciones de los conceptos del Cálculo podían coexistir, si así creía el autor que resultaba conveniente, desde un punto de vista didáctico y de acuerdo con su propia experiencia.

Por ejemplo, en su texto, Bowser (1928) se manifiesta partidario de la presentación infinitesimalista del Cálculo, aunque no desecha otras ideas, según indica en el prefacio:

> El presente trabajo sobre Cálculo Diferencial e Integral está diseñado como un libro de texto para bachillerato y escuelas científicas. El propósito ha sido el de exhibir la materia de muna manera concisa y simple aunque consistente con el rigor de la demostración, para hacerlo tan atractivo al principiante como la naturaleza del Cálculo lo permita…
> He adoptado el método de los infinitesimales, habiendo aprendido de la experiencia que los principios fundamentales de la materia resultan ser más inteligibles a los principiantes con el método de los infinitesimales que con el de los límites, además de que, en las aplicaciones prácticas del Cálculo, las investigaciones son realizadas totalmente por el método de los infinitesimales. Sin embargo, un conocimiento más profundo de la materia requiere que el estudiante esté familiarizado con ambos métodos, razón por la cual el capítulo III está dedicado exclusivamente al método de los límites…

Así pues, vemos que este autor afirma que su propuesta es entendible pero, a la vez, rigurosa, y que “el método de los infinitesimales” es más accesible que el de los límites, sin embargo, reconoce que resulta conveniente estudiar también este último si se requiere “un conocimiento más profundo”.

En el capítulo III, que dedica al “método de los límites”, hace una presentación de los conceptos de límite y derivada de manera parecida a la de los textos actuales, pero sin definir el límite con “épsilon y delta”. En cuanto a las cantidades infinitesimales y la diferencial, nos dice que:

> Una *cantidad infinita*, o un *infinito*, es una cantidad que es mayor que cualquier cantidad asignable. Un *infinitesimal* es una cantidad que es menor que cualquier cantidad asignable…
>
> Si suponemos que una variable, como *x*, experimenta un cambio, tal cambio es llamado un *incremento*; el incremento de *x* es usualmente denotado por Δx, que se lee “diferencia *x*”, o “delta *x*”, donde Δ es tomada como una abreviación de la palabra *diferencia*…
>
> Cuando el *incremento* o *diferencia* se supone *infinitamente pequeña*, o *infinitesimal*, es llamada una *diferencial*, y es representada por *dx*, que se lee “diferencial *x*”, donde *d* es una abreviación de la palabra *diferencial*…

Fue hasta la primera mitad del siglo XX que el rigor comienza aparecer en los textos de Cálculo, centrando la atención en la definición de límite. Finalmente, con la Reforma de la Matemática Moderna, en los años sesenta y setenta, varios de los textos con mayor influencia en las aulas eligen una presentación de los conceptos del cálculo con énfasis en el rigor, haciendo francamente incomprensible el Cálculo para la gran mayoría de los alumnos, no solo del bachillerato, sino también de las escuelas de ingeniería.

5. La diferencial en los textos de cálculo, actualmente

En la actualidad, si bien los textos de Cálculo han disminuido el énfasis en el rigor, mantienen al límite como el concepto central. Comentaremos aquí dos de estos, primeramente el de Leithold (1994) , que tuvo mucha aceptación en nuestro país entre los años ochenta y noventa, y luego el de Haaser (1970), que fue muy utilizado en las escuelas de ingeniería, entre los años setenta y los ochenta.

Hay que decir, antes que nada, que en esa época los autores se ufanaban de no utilizar el Cálculo leibniziano, nada más que su notación, insistiendo siempre a los estudiantes que $\frac{dy}{dx}$ no debería considerarse jamás como una razón. Así, luego de definir la derivada, Leithold dice que:

> Leibniz probablemente Pensó en *dx* y *dy* como pequeños cambios o variaciones de las variables *x* y *y*, y en la derivada de *y* con respecto a *x* como la razón de *dy* a *dx* cuando *dy* y *dx* son pequeños…

Podemos notar claramente el desdén del autor hacia los infinitesimales; *dx* y *dy* son "pequeños" cambios, no cambios infinitamente pequeños. Probablemente el autor asuma que, tres siglos después, ya nadie quiere saber nada sobre infinitesimales, o incluso que habrá que proteger a Leibniz de sus propias concepciones erróneas. Más adelante, el autor indica:

> Se debe recordar que cuando dy/dx se utiliza como notación para la derivada de una función, a *dy* y a *dx* no se les ha dado significado independiente hasta ahora en el texto, aunque posteriormente se definirán por separado. De modo que en esta ocasión dy/dx es un símbolo para la derivada y no debe considerarse como una razón…

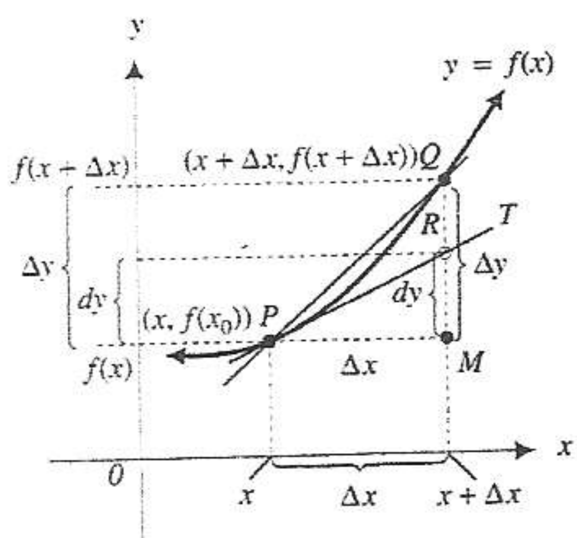

Figura 3. La diferencial en el texto de Leithold

Así pues, debe tenerse muy presente que esta notación se utiliza para referirse a una sola cosa: la derivada; *dx* y *dy*, por separado, no tienen significado (por el momento, dice el autor). En el texto habla de la diferencial sólo como una de las aplicaciones de la derivada, más precisamente como una aproximación lineal:

> Si la función *f* está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la diferencial de *y*, denotada por *dy*, está dada por $dy = f'(x)\,\Delta x$, donde *x* está en el dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de *x*.
>
> Ahora consulte la figura, donde la distancia dirigida es igual a *dy*. Observe que *dy* representa la variación de *y* a lo largo de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$, cuando *x* varía en Δx.

Observemos que esta definición para la diferencial (de la variable dependiente, como lo indica Leithold) es básicamente la misma que la dada desde Lacroix, a mediados del siglo XIX.

En cuanto a la diferencial de área, es decir, a la diferencial correspondiente a una integral doble, en el texto de Haaser podemos ver:

> En la introducción al cálculo hemos estudiado la integral (definida) de Riemann, $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$, de una función real de variable real. En este capítulo consideraremos la generalización del concepto de integral a dimensiones más altas —para las funciones reales de diversas variables reales— y a conjuntos que son más generales que intervalos [...] Aunque la extensión a dimensiones más altas aumenta el problema del cálculo de la evaluación de la integral, la generalización es directa y natural. La extensión es tanto de interés matemático como de importancia considerable en las aplicaciones…

Así pues, podemos ver el autor considera que la integral de área o integral doble, es una extensión o generalización de la integral de una función real, y que esta es de interés tanto en la matemática misma como en las aplicaciones.

Dice que la extensión ocurre de manera simbólica, partiendo de las definiciones que se requerían para la integral de una función real, generalizando lo que sucedía para un conjunto de números reales, a un conjunto de puntos en el plano.

Así, considerando $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, define intervalo cerrado $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ como el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $a_1 \le x \le b_1$ y $a_2 \le y \le b_2$, lo que le permite definir la partición de un intervalo cerrado en el plano y la norma de una partición como estas.

Luego, al considerar una función real *f*, acotada sobre un intervalo en el plano, define el ínfimo y el supremo de la función sobre una región en el plano, y en seguida la suma inferior y la suma superior de una función, correspondientes a una partición P, después de lo cual indica:

> Estas sumas tienen una sencilla interpretación geométrica para funciones no negativas en un intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en $\mathbb{R}^2$, aunque debemos recordar que la sola restricción que hemos impuesto sobre nuestras funciones es que han de ser acotadas…

En los textos de esa época, no era muy bien visto basar una explicación en una figura, haciendo una argumentación visual, de manera que se procuraba presentar todo simbólicamente, y recurrir lo menos posible a las figuras. Continuando con el texto, encontramos lo siguiente:

> La suma inferior [...] es la suma de los paralelepípedos interiores. La suma superior [...] es la suma de los paralelepípedos exteriores…

Luego define la integral inferior y la integral superior de f sobre un intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ y luego de dos lemas y de definir la integral definida (de Riemann) de f sobre $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f$ como el valor de la integral inferior o superior, cuando estos coinciden, indica:

> Puede también usarse para denotar la integral de f la notación $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f\,(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. La integral de una función f sobre un intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^2$ se llama integral doble. El término "doble" se refiere a la dimensión del intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Las notaciones
>
> $$\iint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x,y)dx\,dy \text{ e } \iint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x,y)dA$$
>
> Se usan a veces para denotar la integral doble de f sobre $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Vemos entonces, que al escribir dA o $dx\,dy$ solo se está haciendo uso de otra notación, no se da a ninguna de estas expresiones un significado geométrico. Son simplemente variantes de $d\mathbf{x}$.

6. La propuesta

Para quien se prepara para ejercer profesionalmente la Matemática, el rigor puede resultar irrenunciable, sin embargo, para un estudiante de ingeniería, el énfasis de la formación escolar en cuanto a matemáticas se refiere, debe estar en las aplicaciones y en que estas deben ayudarlo a comprender mejor los conceptos propios de las ciencias de la ingeniería.

Así pues, lo que proponemos a continuación es recuperar las bondades didácticas del Cálculo de fines del siglo XVII, tomando en cuenta la disponibilidad los recursos tecnológicos con los que contamos actualmente, para hacer entonces una presentación de los conceptos propios de la disciplina.

6.1. Tangentes, arcos y cuerdas

Antes de abordar el problema de la diferencial de área consideremos el comportamiento de la tangente y la secante a una curva, y de un arco de la curva misma, en una escala "infinitesimal". A este respecto, Newton afirmaba que, si un punto de una curva se mueve sobre esta, acercándose a otro punto fijo de la curva, "al final, la razón entre cuerda, arco y tangente, es la unidad", lo que actualmente se reconoce como Principio de las (primeras y) últimas razones, el cual se encuentra en *Los Principios* (Newton, 1993). En los lemas VI y VII, de la sección primera del libro primero, dice:

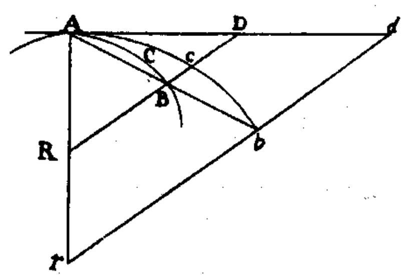

Figura 4. Principio de las últimas razones en Los Principios de Newton

> Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el

> ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia.
>
> Porque si ese ángulo no desapareciese, el arco ACB contendría con la tangente AD un ángulo igual a un ángulo rectilíneo y, por lo tanto, la curvatura en el punto A no será continua, cosa contraria a la hipótesis.
>
> […] Suponiendo las mismas cosas, afirmo que la última razón del arco, la cuerda y la tangente entre sí es la razón de igualdad.

Actualmente se diría que el límite de la razón entre las longitudes de dos cualesquiera de esos tres elementos (tangente, cuerda y arco), es la unidad. En otras palabras, Newton afirmaba que el arco, la cuerda y la tangente se funden, “al final”, en un solo segmento.

En la figura 1.4 se ilustra tal proposición. En cada una de las cuatro gráficas del lado izquierdo se muestra la parte de la curva $y = \operatorname{sen} x$, correspondiente a $x \in [0, 2]$, lo mismo que el punto $P = (1, \operatorname{sen} 1)$. Además, en cada una de las cuatro se muestra, para un punto *Q*, también de la curva, pero en diferentes posiciones, “moviéndose” hacia *P* si se ven las gráficas de arriba hacia abajo.

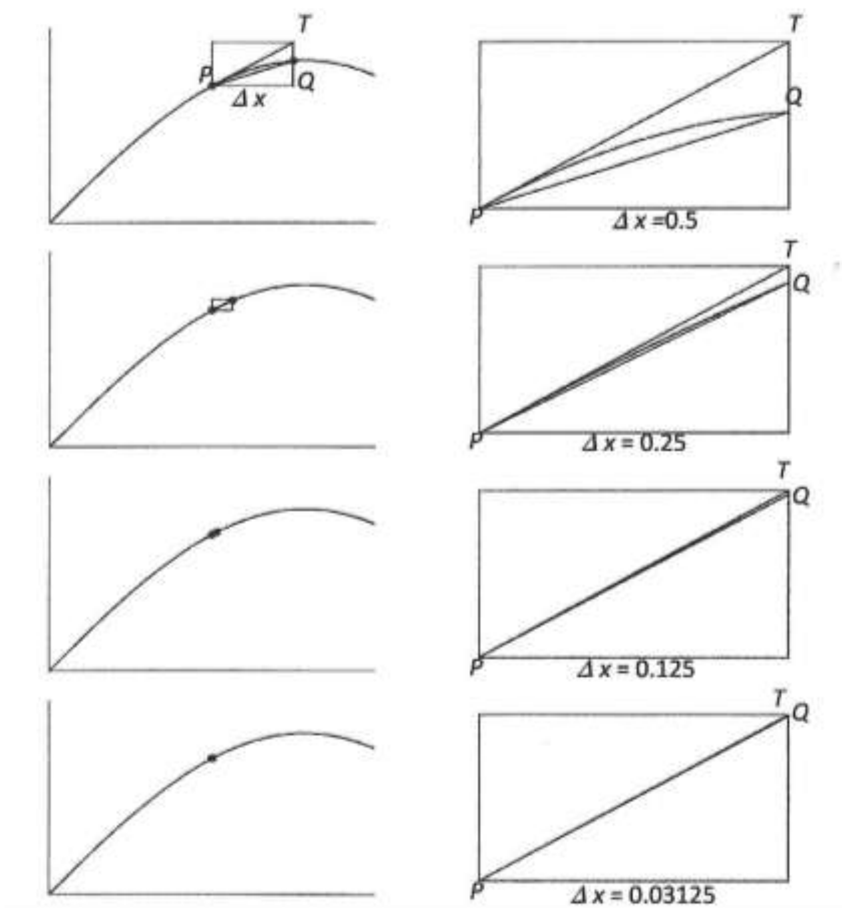

Figura 5. Principio de las últimas razones con ayuda de una computadora

La diferencia entre las abscisas de P y Q es Δx, de manera que las coordenadas de Q son $(1+\Delta x, \text{sen}(1+\Delta x))$. Las figuras mostradas corresponden, respectivamente, de arriba hacia abajo, a $\Delta x = 0.5$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = 0.125$ y, $\Delta x = 0.03125$.

En cada caso se trazó la cuerda PQ y el segmento PT de la recta tangente a la curva en P. Además se trazó el rectángulo definido por esta porción de la recta tangente. Esa región rectangular es la que se muestra ampliada del lado derecho.

Podemos observar, tal como indicaba Newton, que conforme Q se aproxima a P, queda aún más próximo de T, de manera que la cuerda y el arco PQ terminan por confundirse entre sí y con la tangente PT.

Por otra parte, y como se ha dicho anteriormente, para Leibniz y sus seguidores, una curva podía considerarse como una poligonal constituida por una infinidad de segmentos rectilíneos, uniendo cada uno de ellos un par de puntos infinitamente próximos entre sí. De esta manera, si dos puntos de una curva cualquiera están infinitamente próximos entre sí, entonces el arco comprendido entre estos puede ser remplazado por la cuerda o por el correspondiente segmento de la recta tangente. Todo esto se puede aprovechar en las aulas con ayuda de la tecnología.

6.2. Diferencial de área en coordenadas polares

En los textos actuales de Cálculo, por ejemplo en Stewart (2008), cuando se habla de la integral doble en coordenadas polares, se recurre a sumas de Riemann sobre la región típica $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $a \leq r \leq b$, hasta llegar a la consabida fórmula:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\; r\, dr\, d\theta$$

Reconociendo de alguna manera, que el proceso para llegar a esto es muy tedioso, a continuación nos indica:

> Esta fórmula dice que se convierte de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble si se escribe $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, al usar los límites de integración apropiados para r y θ, y remplazar dA por $r\,dr\,d\theta$. Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el lado derecho de la fórmula. Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 6, donde el rectángulo polar “infinitesimal” se puede considerar como un rectángulo ordinario con dimensiones $r\,d\theta$ y dr y, por lo tanto, tiene “área” $dA = r\,dr\,d\theta$.

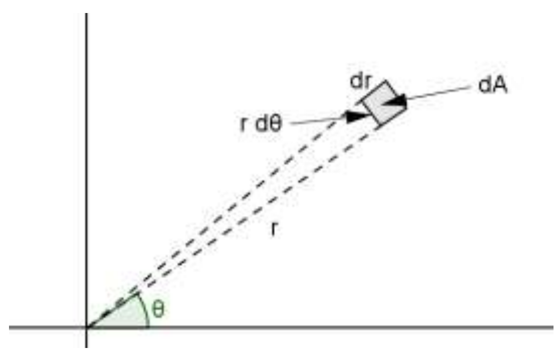

Figura 6. Diferencia de área en coordenadas polares en el texto de Stewart

Observemos que las comillas indican claramente que no se reconoce la legitimidad de las cantidades infinitesimales, dA no es rigurosamente un área y la figura es solo un recurso mnemotécnico.

Si en cambio recurrimos a la concepción leibniziana de las curvas, podemos partir considerando la variación que se produce, en el área de una región, por la variación sucesiva de las variables coordenadas r y θ (ver figura 7, izquierda), es decir, por el movimiento de un punto desde P hasta Q (variación sólo de r) y luego hasta T (variación sólo de θ).

En dicha figura, el punto de partida, P, tiene coordenadas rectangulares $(2,1)$, de manera que $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ y $\theta = \arctan \frac{1}{2}$. A partir de ahí se tiene un incremento $\Delta r = 1.4$ para llegar a Q, y luego un incremento $\Delta\theta = 0.51$ para llegar a T. En tales condiciones es claro que la región generada por el cambio de posición desde P hasta T, es curvilínea, al menos en dos de las cuatro partes de la frontera.

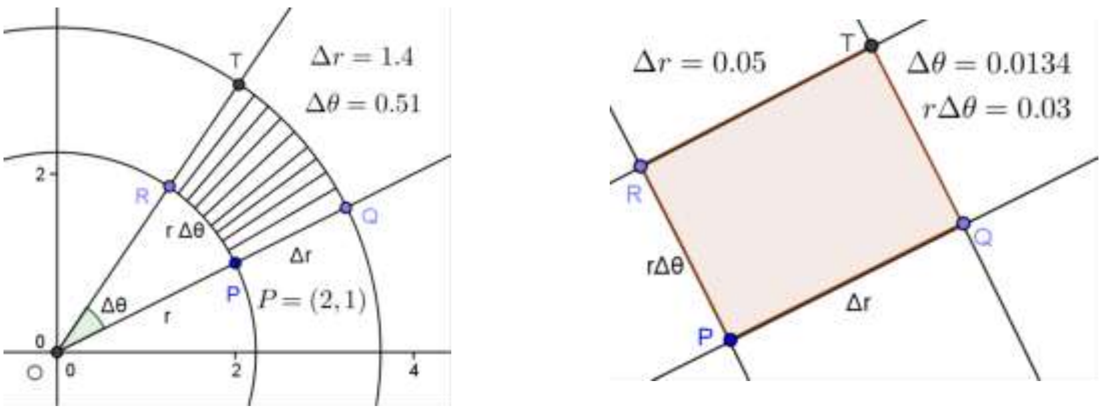

Figura 7. Región plana elemental, en coordenadas polares

Si ahora asumimos que las variaciones son infinitesimales, las curvas se considerarán como rectas, y como la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia, el sector circular será ahora el rectángulo de lados PQ $= dr$ y PR $= r\, d\theta$, así que el elemento de área buscado es el área del rectángulo, es decir $dA = r\, dr\, d\theta$. Con geogebra puede observarse que, con cambios apenas pequeños en los valores de las variables coordenadas, en este caso $\Delta r = 0.05$ y $\Delta\theta = 0.0134$, la región ya se ve como un rectángulo (figura 7, derecha).

6.3. La diferencial de área y el jacobiano de la transformación

Consideremos ahora el problema general de calcular la diferencial de área para una región del plano que es la imagen de una región (preferentemente rectangular) del plano xy, bajo la transformación definida mediante $\mathbf{x} = \mathbf{f}(u,v)$.

Para el caso mostrado en la figura, tenemos definida la transformación inversa definida mediante $u = 2x^2 + 3y^2$ y $v = \frac{y^2}{x}$, de manera que el plano está reticulado por la familia de elipses $u = c$ y la familia de parábolas $v = k$.

Supongamos ahora que ocurren cambios finitos Δu y Δv de las variables coordenadas, de manera que el punto P $= \mathbf{f}(u, v)$ se desplace hasta el punto T $= \mathbf{f}(u + \Delta u, v + \Delta v)$, como se muestra en la figura 8 (izquierda). Este "movimiento" habrá generado el cuadrilátero curvilíneo PQTR. En la figura tenemos que $\Delta u = 1.5$ y $\Delta v = 0.5$.

Si ahora suponemos que los cambios de las variables coordenadas son infinitesimales, en lugar de región curvilínea tendremos el paralelogramo PQTR (figura 8, derecha), cuya área será el área elemental dA correspondiente a la transformación. No podemos realmente hacer una figura con incrementos infinitesimales de las variables coordenadas, sin embargo, con incrementos "pequeños" podemos observar que el cuadrilátero realmente curvilíneo es a la vista un paralelogramo. En la figura tenemos $\Delta u = 0.23$ y $\Delta v = 0.07$.

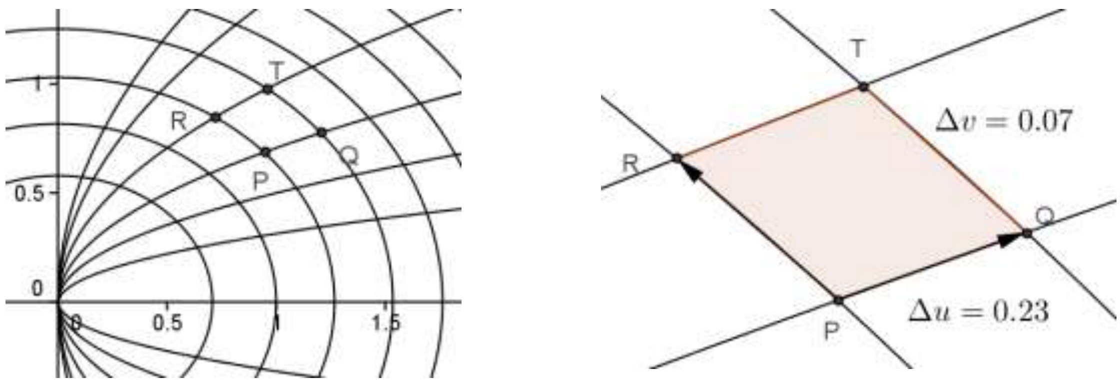

Figura 8. Región plana elemental en coordenadas curvilíneas

Así pues, si el "punto de partida" es P $= \mathbf{f}(u, v)$, Q el punto sobre la curva coordenada ($u =$ constante), que se obtiene al ocurrir una variación infinitesimal dv en el valor de v, permaneciendo u constante y R el punto sobre la curva coordenada ($v =$ constante), que se obtiene al ocurrir una variación infinitesimal du en el valor de v, permaneciendo v constante, tendremos que Q $= \mathbf{f}(u, v + dv)$ y R $= \mathbf{f}(u + du, v)$.

De esta manera, el área elemental correspondiente a la transformación será el área del paralelogramo PQTR, que es la magnitud del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$.

Tenemos además que:

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathbf{f}(u, v + dv) - \mathbf{f}(u, v) = \frac{\mathbf{f}(u,v+dv) - \mathbf{f}(u,v)}{dv}\, dv = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\, dv$$

Y $$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \mathbf{f}(u + du, v) - \mathbf{f}(u, v) = \frac{\mathbf{f}(u+du,v) - \mathbf{f}(u,v)}{du}\, du = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\, du$$

Entonces:

$$dA = \left\| \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\, dv \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\, du \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| du\, dv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

Lo que nos da la conocida "fórmula" de cambio de variable para una integral de área:

$$\int_{R_{xy}} f(x, y)\, dA = \int_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

Si se propone alguna transformación en el plano, geogebra nos permitirá observar que la región curvilínea, comprendida entre dos pares de curvas coordenadas, se verá como un paralelogramo para valores suficientemente pequeños de los incrementos de las variables coordenadas, como se observa en la figura 8 (derecha).

7. Bibliografía

Arcos, I. (2012). *Cálculo multivariable para estudiantes de ingeniería* (2ª Ed). Toluca, México: Kali.

Bezout, E. (1999). *Cálculo infinitesimal*, Limusa-IPN, México, 1999. Traducción de la edición original en francés de 1768.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus. Arch. Hist. Exact Sc., 14, 1-90.

Bowser, E. (1928). *Differential and Integral Calculus*. New York: Van Nostrand.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza editorial.

Carnot, L. (1921). *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal*. París: Gauthier-Villars. Reproducción de la segunda edición de 1813.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis*. México D.F., México: UNAM.

Versión en español basada en los trabajos originales en francés: *cours d'analyse* (1821) y *Résume des leçons sur le calcul ininitésimal* (1823). Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Alverez e introducción de Jean Dhombres.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Grattan-Guinness, I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? *Mathesis*, 7(3).

Haaser, N., LaSalle, J., Sullivan, J. (1970). *Análisis matemático* (Vol. 2). México D.F., México: Trillas.

Lacroix, S. F. (1837). *Traité elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* (5a Ed). Paris: Bachelier.

Lagrange, J. L. (1813). *Théorie des fonctions analytiques* (3a Ed). Paris: Courcier.

Leibniz, W. G. (1983). Nouvelle method pour les maxima et les minima…. Contenido en *Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal*. Paris: Blanchard. El artículo original fue publicado en 1684, en latín, en las actas de Leipzig.

Leithold, L. (1994). *El Cálculo*. (7ª Ed). México D.F., México: Oxford University Press – Harla.

L'Hôpital, G. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México D.F., México: UNAM.

Versión en español del original en francés: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, de 1696. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray.

Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*, México D.F.: UNAM.

Versión en español basada en los trabajos originales en latín: *Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum* (1671). Traducción de Iztaccíhuatl Vargas e introducción de Marco Panza.

Newton, I. (1993). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural.* Barcelona: Altaya. Esta edición española se basó en la tercera edición en latín (1726) y la primera versión inglesa (1729), actualizada por F. Cajori (1934). Las notas y el estudio preliminar son de Antonio Escohotado y la traducción de Antonio Escohotado y M. Sáenz de Heredia.

Stewart, J. (2008). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. (6ª Ed). México D.F., México: Cengage Learning.

Wark, K. (1991). *Termodinámica*. México D.F., México: McGraw-Hill.