La ecuación diferencial ordinaria lineal de primer y segundo orden

José Gerardo Dionisio Romero Jiménez
Academia de Matemáticas del Departamento de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN
México

Resumen. En este trabajo, se desarrolla el tema de las ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden. En el tratamiento teórico de este tema, presente en la bibliografía señalada en los programas de estudio (Boyce y DiPrima 2006, Simmons 1993), hay algunos puntos no debidamente justificados. Uno de estos es: cómo explicar que de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, variando los parámetros, se pueda obtener una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea. Cómo justificar plenamente este método, ¿de dónde surge? En otro lugar de la teoría, la ecuación de Riccati casi no es considerada y en consecuencia se menosprecia su enseñanza. Sin embargo, mostraré que una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, tiene asociada una ecuación de Riccati que la caracteriza. Por esta razón, propongo un desarrollo teórico, alternativo de este tema, que tiene en cuenta lo antes expuesto, mediante la aplicación del cálculo diferencial e integral, y el álgebra lineal. La idea básica es como sigue: la ecuación diferencial lineal y la ecuación diferencial lineal homogénea asociada, determinan un sistema de ecuaciones diferenciales, el cual implícitamente, define una relación entre sus soluciones y, como se verá, es posible determinar la forma específica de tales soluciones y la manera en que están relacionadas.

1. Introducción

En este desarrollo teórico alternativo, en el que se trata el problema de resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden, en el contexto del álgebra lineal, la obtención de las soluciones está libre de condiciones impuestas, como se verá.

En la segunda sección, se considera que la ecuación diferencial lineal de primer orden $\mathbf{y'+p(x)\,y = h(x)}$ y la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea asociada $\mathbf{y'+p(x)\,y = 0}$, constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales, el cual implícitamente, define una relación entre sus soluciones, las cuales se suponen conocidas y las funciones $\mathbf{p(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son consideradas como funciones incógnitas, como se verá, es posible determinar la forma específica de tales soluciones y la manera en que están relacionadas, mediante la aplicación del álgebra lineal y el cálculo diferencial e integral.

En la tercera sección, en forma similar, la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\mathbf{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = h(x)}$ y su solución $\mathbf{y = y(x)}$ supuesta conocida, la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea asociada $\mathbf{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0}$ y sus soluciones $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ y $\mathbf{y_2 = y_2(x)}$ supuestas conocidas, permiten establecer un sistema de tres ecuaciones diferenciales en el que las funciones $\mathbf{p(x)}$, $\mathbf{q(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son consideradas como funciones incógnitas. Aquí también, se determina la forma específica de tales soluciones y la manera en que están relacionadas, mediante la aplicación del álgebra lineal y el cálculo diferencial e integral. Finalmente, se muestra la asociación de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y su respectiva ecuación de Riccati, constituyendo ésta una ecuación auxiliar para resolver la otra.

En la cuarta sección, se hace una descripción del modo tradicional en que se obtienen las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales (homogénea y no homogénea) de primer orden, contrastándola con la forma constructiva contenida en esta propuesta mediante el álgebra lineal y el cálculo diferencial e integral. También, se hace la correspondiente descripción del modo tradicional en que se obtienen las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales (homogénea y no homogénea) de segundo orden, en términos de una solución conocida, el método de variación del parámetro para calcular otra solución linealmente independiente de la primera, y el método de variación de los parámetros para calcular una solución particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden, contrastándola con la correspondiente forma constructiva de esta propuesta, en el contexto del álgebra lineal y el cálculo diferencial e integral. Para el caso particular de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes se determina su correspondiente ecuación de Riccati, se resuelve ésta para determinar las soluciones fundamentales y la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Finalmente, se aprovecha esta circunstancia para hacer un análisis del comportamiento de descarga de un capacitor en un circuito eléctrico en serie LRC.

2. La ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden cuya forma es

$$\mathbf{y'+p(x)\,y = h(x)}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{p(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son funciones continuas y no idénticamente nulas en un intervalo I, tiene asociada una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de primer orden, la cual tiene la forma

$$\mathbf{y'+p(x)\,y = 0}\,. \tag{2}$$

Comenzando con la asociación de estas ecuaciones, se constituye así, un sistema de ecuaciones diferenciales. Si $\mathbf{y = y(x)}$ es solución de la ecuación diferencial lineal **(1)** y si $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ es solución no idénticamente nula en el intervalo I de la ecuación diferencial lineal homogénea **(2)**, entonces, al satisfacer $\mathbf{y = y(x)}$ y $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ a las respectivas ecuaciones diferenciales **(1)** y **(2)**, con ellas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{y_1\ p(x)} \qquad\quad &\mathbf{= -\,y'_1} \\ \mathbf{y\ \ p(x) - h(x)} &\mathbf{= -\,y'} \end{aligned}, \tag{3}$$

donde las funciones $\mathbf{p(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son consideradas como funciones incógnitas.

a). Al resolver este sistema de ecuaciones para $\mathbf{p(x)}$, usando el Método de Cramer, se tiene

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \frac{\begin{vmatrix} -\mathbf{y}'_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}' & -\mathbf{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{1} \end{vmatrix}} = -\frac{\mathbf{y}'_1}{\mathbf{y}_1} = -\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \ln \mathbf{y}_1 , \tag{4}$$

donde se observa que es posible determinar a $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$. El proceso para esto es el siguiente

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \ln \mathbf{y}_1 = -\mathbf{p}(\mathbf{x}),$$

$$\ln \mathbf{y}_1 = -\int \mathbf{p}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} + \mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}^{-\int \mathbf{p}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} + \mathbf{k}} = \mathbf{c}_1 \mathbf{e}^{-\int \mathbf{p}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}} . \tag{5}$$

Por tanto, la determinación de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(2)** depende de la existencia de una función primitiva para la función $\mathbf{p(x)}$. Si tal existencia se da, entonces la solución general está definida por la expresión **(5)**. Si en la expresión **(5)**, se hace $\mathbf{c_1 = 1}$, entonces $\mathbf{y_1 = e^{-\int p(x)\, dx}}$ es denominada solución fundamental de la ecuación diferencial lineal homogénea **(2)**.

b) Ahora, al resolver el sistema de ecuaciones **(3)** para $\mathbf{h(x)}$, usando el Método de Cramer y la siguiente propiedad de los determinantes: dado un determinante, si un renglón o una columna es multiplicado por una constante $\mathbf{k \neq 0}$, entonces el valor del nuevo determinante es $\mathbf{k}$ veces el valor del determinante dado, se obtiene

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & -\mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y} & -\mathbf{y}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y} & \mathbf{y}' \end{vmatrix}}{\mathbf{y}_1} = \frac{\mathbf{y}_1\mathbf{y}' - \mathbf{y}\mathbf{y}'_1}{\mathbf{y}_1} = \mathbf{y}_1 \frac{\mathbf{y}_1\mathbf{y}' - \mathbf{y}\mathbf{y}'_1}{\mathbf{y}_1^{\,2}} = \mathbf{y}_1 \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}_1}\right), \tag{6}$$

donde por sencillez $\mathbf{y_1}$ es solución fundamental de la ecuación diferencial lineal homogénea **(2)**. En esta expresión se observa que $\mathbf{h(x)}$ relaciona las soluciones $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ y $\mathbf{y = y(x)}$, y que es posible determinar la solución $\mathbf{y = y(x)}$. Para determinar tal solución, se procede de la siguiente manera

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}_1}\right) = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{y}_1}$$

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}_1} = \int \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{y}_1}\, \mathbf{dx} + \mathbf{c}_1 ,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 \int \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{y}_1}\, \mathbf{dx} + \mathbf{c}_1 \mathbf{y}_1 .$$

En esta expresión, al sustituir $\mathbf{y_1 = e^{-\int p(x)\,dx}}$ que es solución fundamental se obtiene

$$\mathbf{y = e^{-\int p(x)\,dx}\int h(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c_1 e^{-\int p(x)\,dx}}\,. \qquad \mathbf{(7)}$$

Por tanto, la determinación de la solución general de la ecuación diferencial lineal **(1)** depende de la existencia de una función primitiva para la función $\mathbf{p(x)}$ y de la existencia de una función primitiva para la función $\mathbf{g(x) = h(x)e^{\int p(x)\,dx}}$. Si tales funciones primitivas existen, entonces la solución general de la ecuación diferencial lineal (1), está definida por la expresión **(7)**. En esta expresión, se dice que

$$\mathbf{y_p = e^{-\int p(x)\,dx}\int h(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx} \qquad \mathbf{(8)}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial lineal **(1)**.

De esta manera, hemos obtenido la expresión **(7)** la cual determina la solución general de la ecuación diferencial lineal **(1)** y es la suma de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(2)** y una solución particular **(8)**. La expresión **(7)** define la relación explícita entre las soluciones de las respectivas ecuaciones diferenciales **(1)** y **(2)**.

3. La ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden

Para el desarrollo que aquí se presenta $\mathbf{p(x)}$, $\mathbf{q(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son funciones continuas en un intervalo I, $\mathbf{h(x)}$ no es idénticamente nula en un intervalo I.

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, cuya forma es

$$\mathbf{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = h(x)}, \qquad \mathbf{(9)}$$

tiene asociada una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden, la cual tiene la forma

$$\mathbf{y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0}\,. \qquad \mathbf{(10)}$$

Aquí, como en el caso de la ecuación diferencial lineal de primer orden, comenzando con la asociación de estas ecuaciones **(9)** y **(10)**, se constituye así, un sistema de ecuaciones diferenciales, a partir del cual se quiere determinar las respectivas soluciones y explicitar la relación que existe entre ellas. Para esto, procedemos como sigue.

Sea $\mathbf{y = y(x)}$ solución de la ecuación diferencial lineal **(9)** y sean $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$, $\mathbf{y_2 = y_2(x)}$ soluciones, no idénticamente nulas en el intervalo I, de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**. Entonces, al satisfacer $\mathbf{y = y(x)}$, $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ y $\mathbf{y_2 = y_2(x)}$ a las respectivas ecuaciones diferenciales **(9)** y **(10)**, con ellas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{y_1\, q(x) + y_1'\,p(x)} &\mathbf{= -\,y_1''} \\ \mathbf{y_2\, q(x) + y_2'\,p(x)} &\mathbf{= -y_2''}\,, \\ \mathbf{y\;\; q(x) + y'\,p(x) - h(x)} &\mathbf{= -\,y''} \end{aligned} \qquad \mathbf{(11)}$$

donde las funciones $\mathbf{p(x)}$, $\mathbf{q(x)}$ y $\mathbf{h(x)}$ son consideradas como funciones incógnitas.

a) Al resolver este sistema de ecuaciones para $\mathbf{p(x)}$, usando el Método de Cramer, se tiene

$$\mathbf{p(x)} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & -y_1'' & 0 \\ y_2 & -y_2'' & 0 \\ y & -y'' & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & 0 \\ y_2 & y_2' & 0 \\ y & y' & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{-(y_1 y_2' - y_2 y_1')}.$$

Como el numerador es $y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1 y_2'' + y_2' y_1' - y_1' y_2' - y_2 y_1'' = \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_2 y_1')$, entonces $\mathbf{p(x)}$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{p(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = -\frac{d}{dx}\ln\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right), \qquad \mathbf{(12)}$$

donde $y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$, para todo $\mathbf{x}$ en el intervalo **I**, porque $\mathbf{p(x)}$ está definida para todo $\mathbf{x}$ en el intervalo **I**. También, se observa que es posible determinar una forma más explícita de la relación que hay entre y_1 y y_2, y sus derivadas. Procedemos como sigue:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = -p(x),$$

$$\ln\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = -\int p(x)\,dx + c,$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{-\int p(x)\,dx + c} = k\ e^{-\int p(x)\,dx}. \qquad \mathbf{(13)}$$

En esta expresión **(13)**, se observa que $y_1 y_2' - y_2 y_1' > 0$, para todo $\mathbf{x}$ en el intervalo **I**, porque $e^{c} = k > 0$ y $e^{-\int p(x)\,dx} > 0$.

La expresión $y_1 y_2' - y_2 y_1' > 0$, para todo $\mathbf{x}$ en el intervalo **I**, se puede reescribir como:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{{y_1}^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \neq 0, \qquad \frac{y_2}{y_1} \neq c, \text{ para toda constante } c.$$

Por tanto, $y_2 \neq c\, y_1$ para toda constante **c**, lo que significa que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10).**

La expresión **(13)**, también se puede escribir en la forma

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = k\, e^{-\int p(x)\,dx} = w(y_1, y_2), \tag{14}$$

expresión que contiene cuatro formas de lo que se llama el Wronskiano de y_1 y y_2, el cual, ya se dijo, no es idénticamente nulo en el intervalo I.

De la expresión **(14)**, también se obtiene lo siguiente:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{k\, e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{k\, e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = k \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx + c_1,$$

$$y_2 = k\, y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx + c_1 y_1. \tag{15}$$

La expresión **(15)** muestra que no es posible determinar explícitamente una primera solución $y_1 = y_1(x)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**. También **(15)** muestra, que es la única forma de la solución general de la misma ecuación diferencial. En la misma expresión **(15)**, la relación más sencilla entre y_1 y y_2 se obtiene haciendo $c_1 = 0$ y $k = 1$. Así,

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx \tag{16}$$

es la conocida, segunda solución linealmente independiente, tradicionalmente obtenida de $y = c_1 y_1$ mediante la variación del parámetro c_1. En estas condiciones

$$y_1 \quad , \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx \tag{17}$$

son denominadas soluciones fundamentales de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**. En términos de estas soluciones fundamentales, la expresión **(15)** escrita en la forma

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{18}$$

establece una relación explícita en la que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**, representada por $\mathbf{y_H}$ depende del conocimiento de una solución $\mathbf{y_1}$ de la misma ecuación diferencial y de la existencia de una función primitiva para la función $\mathbf{i(x)=\dfrac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^{\,2}}}$. Si esta función primitiva existe, la expresión **(18)** define la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**.

b) Ahora, al resolver el sistema de ecuaciones **(11)** para $\mathbf{h(x)}$, usando el Método de Cramer, la propiedad de los determinantes mencionada en el apartado anterior inciso **b)** y esta otra propiedad de los determinantes: dado un determinante, si los renglones o columnas son transpuestas, entonces el valor del nuevo determinante no cambia, se obtiene.

$$\mathbf{h(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & -y''_1 \\ y_2 & y'_2 & -y''_2 \\ y & y' & -y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & 0 \\ y_2 & y'_2 & 0 \\ y & y' & -1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y''_1 & y''_2 & y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}=\frac{w(y_1,y_2,y)}{w(y_1,y_2)}}, \qquad \mathbf{(19)}$$

donde, por sencillez, $\mathbf{y_1}$ y $\mathbf{y_2}$ son las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)** y $\mathbf{w(y_1,y_2,y)}$ es el wronskiano de $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y}$, del cual se hace el siguiente desarrollo.

$$\mathbf{w(y_1,y_2,y)=\left(y''_1\begin{vmatrix} y_2 & y \\ y'_2 & y' \end{vmatrix}-y''_2\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix}+y''\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}\right)}$$

$$\mathbf{=\frac{1}{y_1}\left(y_1y''_1\begin{vmatrix} y_2 & y \\ y'_2 & y' \end{vmatrix}-y_1y''_2\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix}+y_1y''\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}\right)}. \qquad \mathbf{(20)}$$

En **(20)**, el primer sumando, dentro del paréntesis, puede escribirse en la siguiente forma:

$$\mathbf{y_1y''_1\begin{vmatrix} y_2 & y \\ y'_2 & y' \end{vmatrix}=y_1y''_1y_2y'-y_1y''_1y'_2y+y'_1y_2y''_1y-y'_1y_2y''_1y}$$

$$\mathbf{=-y''_1y\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}+y''_1y_2\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix}}. \qquad \mathbf{(21)}$$

Sustituyendo **(21),** en **(20)**:

$$= \frac{1}{y_1}\left(-yy''_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} + y_2 y''_1 \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} - y_1 y''_2 \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} + y_1 y'' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{y_1}\left(\left(y_1 y'' - yy''_1 \right) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} - \left(y_1 y''_2 - y''_1 y_2 \right) \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} \right). \qquad \textbf{(22)}$$

En **(22)**:

$$y_1 y'' - y''_1 y = y_1 y'' + y' y'_1 - y'_1 y' - yy''_1$$

$$= \frac{d}{dx}(y_1 y' - y'_1 y) = \frac{d}{dx}\left(\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} \right) = \frac{d}{dx} w(y_1, y),$$

$$y_1 y''_2 - y''_1 y_2 = y_1 y''_2 + y'_2 y'_1 - y'_1 y'_2 - y_2 y''_1$$

$$= \frac{d}{dx}(y_1 y'_2 - y'_1 y_2) = \frac{d}{dx}\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \right) = \frac{d}{dx} w(y_1, y_2).$$

Estas expresiones se sustituyen en **(22)** que es un resultado equivalente a **(20)**, de donde **(20)** toma la forma

$$w(y_1, y_2, y) = \frac{1}{y_1}\left(w(y_1, y_2)\frac{d}{dx} w(y_1, y) - w(y_1, y)\frac{d}{dx} w(y_1, y_2) \right)$$

$$= \frac{1}{y_1} w(y_1, y_2) \frac{\left(w(y_1, y_2)\frac{d}{dx} w(y_1, y) - w(y_1, y)\frac{d}{dx} w(y_1, y_2) \right)}{w(y_1, y_2)}. \qquad \textbf{(23)}$$

Ahora al sustituir **(23)** en **(19)**, se obtiene

$$h(x) = \frac{w(y_1, y_2, y)}{w(y_1, y_2)} = \frac{1}{y_1} w(y_1, y_2) \frac{\left(w(y_1, y_2)\frac{d}{dx} w(y_1, y) - w(y_1, y)\frac{d}{dx} w(y_1, y_2) \right)}{\left(w(y_1, y_2) \right)^2}.$$

Por tanto,

$$h(x) = \frac{1}{y_1} w(y_1, y_2) \frac{d}{dx}\left(\frac{w(y_1, y)}{w(y_1, y_2)} \right). \qquad \textbf{(24)}$$

De donde se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w(y_1, y)}{w(y_1, y_2)} \right) = \frac{y_1 h(x)}{w(y_1, y_2)}$$

$$\frac{w(y_1,y)}{w(y_1,y_2)}=\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2$$

$$\frac{\dfrac{y_1y'-yy'_1}{y_1^2}}{\dfrac{y_1y'_2-y_2y'_1}{y_1^2}}=\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2$$

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{y_1}\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)}=\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$\frac{y}{y_1}=\int\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right]dx.$$

Integrando por partes el primer término de la suma, haciendo

$$u=\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx \text{ y } dv=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)dx$$

se obtiene

$$\frac{y}{y_1}=\frac{y_2}{y_1}\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx-\int\frac{y_2}{y_1}\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2\frac{y_2}{y_1}+c_1.$$

Finalmente, aplicando la ley conmutativa y multiplicando por y_1, se obtiene

$$y=y_1\int\frac{-y_2h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx+c_2y_2+c_1y_1. \qquad \textbf{(25)}$$

Por tanto, la expresión **(25)** muestra que la solución general de la ecuación diferencial lineal **(9)** depende del conocimiento de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**, y de la existencia de las integrales

$$\int\frac{-y_2h(x)}{w(y_1,y_2)}dx, \qquad \int\frac{y_1h(x)}{w(y_1,y_2)}dx.$$

Si estas integrales existen, entonces tal solución general está definida por la expresión **(25)**. En esta expresión, se dice que

$$\mathbf{y_p = y_1 \int \frac{-y_2 h(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 h(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx} \qquad \mathbf{(26)}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial lineal **(9)**.

De esta manera, hemos obtenido la expresión **(25)** la cual muestra que la solución general de la ecuación diferencial lineal **(9)** es la suma de la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)** y una solución particular **(26)** de la misma ecuación diferencial **(9)**. La expresión **(25)** muestra que es la única forma de expresar la solución general de la ecuación diferencial lineal **(9)** y también define la relación explícita entre las soluciones de las respectivas ecuaciones diferenciales **(9)** y **(10)**.

Queda pendiente cómo calcular o determinar una primera solución $\mathbf{y_1}$ de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**. Un intento, es el siguiente:

Sea $\mathbf{r(x)}$ una función cuya derivada es continua en el intervalo I, ya mencionado, tal que

$$\mathbf{y_1 = e^{\int r(x)\, dx}}$$

es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**. Entonces si se sustituyen

$$\mathbf{y_1 = e^{\int r(x)\, dx}}, \ \mathbf{y_1' = r(x) e^{\int r(x)\, dx}},$$

$$\mathbf{y_1'' = (r(x))^2 e^{\int r(x)\, dx} + r'(x) e^{\int r(x)\, dx}},$$

en la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)**, se obtiene

$$\mathbf{(r(x))^2 e^{\int r(x)\, dx} + r'(x)\, e^{\int r(x)\, dx} + p(x) r(x)\, e^{\int r(x)\, dx} + q(x)\, e^{\int r(x)\, dx} = 0},$$

$$\mathbf{\left[(r(x))^2 + r'(x) + p(x)\, r(x) + q(x)\right] e^{\int r(x)\, dx} = 0},$$

$$\mathbf{(r(x))^2 + r'(x) + p(x) r(x) + q(x) = 0}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{y_1 = e^{\int r(x)\, dx}}$$

es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10)** si y sólo si $\mathbf{r(x)}$ es una solución de la ecuación de Riccati

$$\mathbf{r'(x) + (r(x))^2 + p(x) r(x) + q(x) = 0}. \qquad \mathbf{(27)}$$

4. Análisis comparativo del procedimiento tradicional y el método propuesto.

La solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden **(2)** ha sido obtenida separando las variables o introduciendo el factor integrante $\mathbf{e^{\int p(x)\, dx}}$ sin explicar su procedencia. La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden **(1)** se ha obtenido, en un caso, usando la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea **(5)** variando el parámetro $\mathbf{c_1}$, sin justificación, y proponiendo que satisfaga a la ecuación diferencial lineal **(1)**. En otro caso, mediante la introducción del factor integrante $\mathbf{e^{\int p(x)\,dx}}$, también, sin explicar su procedencia.

En la sección 2, se ha planteado una alternativa, con las dos ecuaciones diferenciales lineales **(1)** y **(2)** y sus respectivas soluciones, sin conocerlas explícitamente, se ha establecido el sistema de ecuaciones diferenciales $(\mathbf{3})$. Este sistema, como sistema de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que su determinante es diferente de cero, tiene únicamente una solución constituida por las expresiones **(4)** y **(6)**. En estas expresiones es fácil visualizar los pasos a seguir para obtener, explícitamente, las soluciones $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ y $\mathbf{y = y(x)}$, expresiones **(5)** y **(7)**, únicamente usando cálculo integral.

La solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden **(10)** ha sido obtenida suponiendo conocida una solución $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$, aquí no se dice porqué se comienza así, luego variando el parámetro **c** en la familia de soluciones $\mathbf{y = c\,y_1(x)}$: se pone $\mathbf{c(x)}$ en lugar de **c** y proponiendo que satisfaga tal ecuación diferencial, esto con el objeto de obtener una segunda solución $\mathbf{y_2 = y_2(x)}$ linealmente independiente de la primera, finalmente, se hace una combinación lineal de las dos soluciones $\mathbf{y_1 = y_1(x)}$ y $\mathbf{y_2 = y_2(x)}$, el resultado, como se sabe, es

$$\mathbf{y_H = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{{y_1}^2}\,dx}\,.$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden **(9)** se ha obtenido usando la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden **(18)** variando los parámetros $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$, otra vez sin justificación, sin sustento, y proponiendo que satisfaga a la ecuación diferencial lineal de segundo orden. En el proceso, en el método de variación de los parámetros, en la expresión

$$\mathbf{y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2}$$

obtenida de **(18)**, algunos autores proponen una condición: que la suma de los dos últimos términos valga cero, es decir,

$$\mathbf{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0}\,,$$

porque la derivada $\mathbf{y''}$ contendría las derivadas de segundo orden $\mathbf{c_1''}$ y $\mathbf{c_2''}$, con las cuales el proceso se complica. Esta es una condición impuesta.

En la sección 3, se ha planteado la correspondiente alternativa. Para las ecuaciones en consideración y sus respectivas soluciones propuestas, se ha establecido el sistema de ecuaciones diferenciales **(11)**. Este sistema, como sistema de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que su determinante es el negativo de $y_1 y'_2 - y_2 y'_1$, que éste es el conocido wronskiano de y_1 y y_2, expresión **(14)**, el cual es diferente de cero, tiene únicamente una solución constituida por

$$p(x) = -\frac{d}{dx}\ln\left(y_1 y'_2 - y_2 y'_1\right)$$

$$h(x) = \frac{1}{y_1} w(y_1, y_2)\frac{d}{dx}\left(\frac{w(y_1, y)}{w(y_1, y_2)}\right).$$

En estas expresiones es fácil visualizar los primeros pasos a seguir para obtener, explícitamente, primero la relación entre las soluciones $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$, expresión **(15)**, donde evidentemente se muestra que no es posible determinar explícitamente una primera solución $y_1 = y_1(x)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea **(10),** y luego la relación entre las soluciones $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ y $y = y(x)$ expresión **(25)**. Esto también, usando cálculo integral y no hay restricciones impuestas.

Como aplicación de lo expuesto, consideremos el caso de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden **(10)** donde p y q son constantes. La ecuación diferencial de Riccati asociada es

$$r'(x) + (r(x))^2 + p\,r(x) + q = 0$$

en la cual, si ponemos $r(x) = cte = r$ y $r'(x) = 0$, entonces

$$r^2 + pr + q = 0. \qquad \textbf{(28)}$$

Por tanto, la ecuación de Riccati admite dos soluciones constantes, que son las raíces de la ecuación algebraica cuadrática **(28)**:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \qquad \textbf{(29)}$$

a) Si en **(28)**, r_1 y r_2 son soluciones reales distintas ($p^2 - 4q > 0$), entonces

$$y_1 = e^{\int r_1\, dx} = e^{r_1 x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{\int r_2\, dx} = e^{r_2 x}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, donde r_1 y r_2 están definidas en la expresión **(29)**. Por tanto, de acuerdo con la expresión **(18),**

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad \textbf{(30)}$$

es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, donde r_1 y r_2 están definidas en la expresión **(29)**.

b) Si en **(28)**, r_1 y r_2 son soluciones reales iguales ($p^2 - 4q = 0$), entonces $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Para calcular una segunda solución linealmente independiente de la primera, se usa **(29)**, de donde se obtiene $-p-2r_1=0$, y usando este resultado en la expresión **(16)**, se obtiene

$$y_2 = e^{r_1 x}\int e^{(-p-2r_1)x}dx = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Por tanto, de acuerdo con la expresión **(18)**,

$$y = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{p}{2}x} \qquad \textbf{(31)}$$

es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, cuando $r_1 = r_2$.

c) Si en **(28)**, r_1 y r_2 son soluciones complejas ($p^2 - 4q < 0$), entonces éstas tienen la forma $r_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\omega i}{2}$, $r_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\omega i}{2}$ donde ωi y $-\omega i$ son las raíces cuadradas de $p^2 - 4q$. Entonces, en estas condiciones

$$y_1 = e^{\int r_1\, dx} = e^{\left(-\frac{p}{2}+\frac{\omega}{2}i\right)x} = e^{-\frac{p}{2}x}\left(\cos\frac{\omega}{2}x + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}x\right),$$

$$y_2 = e^{\int r_2\, dx} = e^{\left(-\frac{p}{2}-\frac{\omega}{2}i\right)x} = e^{-\frac{p}{2}x}\left(\cos\frac{\omega}{2}x - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}x\right)$$

son soluciones complejas de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Se puede comprobar que las siguientes expresiones también son soluciones, y son soluciones reales

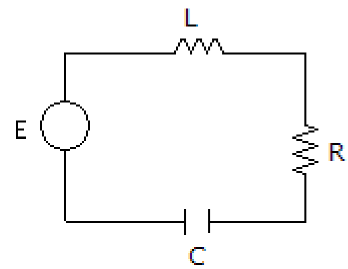
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\omega}{2}x \quad \text{y} \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{-\frac{p}{2}x}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}x$$

Por tanto, de acuerdo con la expresión **(18)**,

$$y = c_1 e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\omega}{2}x + c_2 e^{-\frac{p}{2}x}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}x \qquad \textbf{(32)}$$

es la solución general real de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, cuando r_1 y r_2 son soluciones complejas de la ecuación algebraica cuadrática **(28)**.

Estos resultados son muy importantes en el análisis de un circuito eléctrico en serie LRC como el que se muestra en la figura



El voltaje en el inductor es $\mathbf{L\frac{di}{dt}}$, donde **L** es la inductancia en henrios. El voltaje en el resistor es $\mathbf{i\,R}$, donde **R** es la resistencia en ohmios, $\mathbf{i = i(t)}$ es la corriente en el circuito. El voltaje en el capacitor es $\mathbf{\frac{1}{c}q}$, donde **c** es la capacitancia en faradios y $\mathbf{q = q(t)}$ es la carga eléctrica en el capacitor. Se considera el caso particular en que $\mathbf{E(t) = 0}$, en el que se dice que las vibraciones eléctricas están libres. De acuerdo con la segunda Ley de Kirchhoff, se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

$$\mathbf{L\frac{di}{dt} + i\,R + \frac{1}{c}q = 0}. \qquad \mathbf{(33)}$$

Como $\mathbf{i(t) = \frac{dq}{dt}}$, entonces la ecuación **(33)** puede expresarse sólo en términos de la carga **q** y las constantes:

$$\mathbf{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = 0}. \qquad \mathbf{(34)}$$

En este caso, la ecuación algebraica característica es

$$\mathbf{L\,r^2 + Rr + \frac{1}{c} = 0}. \qquad \mathbf{(35)}$$

Las raíces de esta ecuación están determinadas por las expresiones

$$\mathbf{r_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{c}}}{2L}} \text{ y } \mathbf{r_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{c}}}{2L}} \qquad \mathbf{(36)}$$

Si en **(36)** $\mathbf{R^2 - \frac{4L}{c} > 0}$, entonces son válidas las siguientes desigualdades:

$$\mathbf{R^2 > R^2 - \frac{4L}{c} > 0,\ R > \sqrt{R^2 - \frac{4L}{c}},\ 0 > -R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{c}},\ \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{c}}}{2L} < 0}.$$

Teniendo en cuenta la última expresión, los valores específicos que pueden tomar los parámetros $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ correspondientes a las condiciones iniciales que se establezcan, se tiene que la carga eléctrica en el capacitor, de acuerdo con la expresión **(30)**, está determinada por

$$q(t)=k_1 e^{\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}}{2L}t}+k_2 e^{\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}}{2L}t},$$

de donde se deduce que la carga $q=q(t)$ decae exponencialmente a cero cuando $t\to\infty$. Este comportamiento de descarga del capacitor caracteriza al circuito, se dice que el circuito es sobreamortiguado.

Si en **(36)** $R^2-\frac{4L}{c}=0$, entonces la carga eléctrica en el capacitor, de acuerdo con la expresión **(31)**, está determinada por

$$q(t)=k_1 e^{\frac{-R}{2L}t}+k_2\, t\, e^{\frac{-R}{2L}t}. \quad \textbf{(37)}$$

En el segundo sumando de **(37)**, aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{t\to\infty} t e^{\frac{-R}{2L}t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\frac{R}{2L}t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{R}{2L}e^{\frac{R}{2L}t}}=0. \quad \textbf{(38)}$$

También de **(37)**, se obtiene

$$q'(t)=\frac{-R}{2L}k_1 e^{\frac{-R}{2L}t}+k_2\left(\frac{-R}{2L}t\, e^{\frac{-R}{2L}t}+e^{\frac{-R}{2L}t}\right)=e^{\frac{-R}{2L}t}\left(\frac{-R}{2L}k_1+k_2\frac{-R}{2L}t+k_2\right).$$

Se puede comprobar que $q'(t)=0$ si y sólo si $t=\frac{2L}{R}-\frac{k_1}{k_2}>0$.

También se puede comprobar que

$$q''(t)=e^{\frac{-R}{2L}t}\left(-k_2\frac{R}{L}+\frac{R^2}{4L^2}(k_1+k_2t)\right)<0 \text{ si y sólo si } t\in\left(0,\frac{4L}{R}-\frac{k_1}{k_2}\right)$$

y que

$$q''(t)=e^{\frac{-R}{2L}t}\left(-k_2\frac{R}{L}+\frac{R^2}{4L}(k_1+k_2t)\right)>0 \text{ si y sólo si } t\in\left(\frac{4L}{R}-\frac{k_1}{k_2},\infty\right).$$

Por tanto, en estas condiciones, teniendo en cuenta la expresión **(38)** y de acuerdo con las interpretaciones geométricas de las derivadas de primer y segundo orden, se concluye que en el intervalo de tiempo $\left[0,\frac{2L}{R}-\frac{k_1}{k_2}\right]$ el capacitor se carga y luego se descarga totalmente cuando $t\to\infty$. En estas condiciones se dice que el circuito es críticamente amortiguado.

Si en **(36)** $\mathbf{R^2 - \frac{4L}{c} < 0}$, entonces la carga eléctrica en el capacitor está determinada, de acuerdo con la expresión **(32)**, por

$$\mathbf{q(t) = k_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\frac{\omega}{2L}t + k_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen}\frac{\omega}{2L}t = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(k_1 \cos\frac{\omega}{2L}t + k_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{2L}t\right).} \quad \mathbf{(39)}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la raíz cuadrada de $\mathbf{\frac{4L}{c} - R^2}$. En la expresión **(39)**, se interpreta lo siguiente: la carga $\mathbf{q = q(t)}$ oscila y decae exponencialmente a cero cuando $\mathbf{t \to \infty}$. Esto significa que, sucesivamente, el capacitor se carga y descarga, se descarga más de lo que se carga, hasta quedar completamente descargado. En esta situación se dice que el circuito es subamortiguado.

Referencias

Boyce & DiPrima. (2006). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. México: Limusa Wiley.

Forsyth, A. (1996). *A Treatise on Differential Equations*. Mineola, N. Y. : Dover Publications, Inc.

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. Madrid, España: Mc Graw Hill.

José Gerardo Dionisio Romero Jiménez
dionisio1003@hotmail.com