El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo : Infinito potencial versus infinito real

Fernando Hitt
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal

Resumen: El descubrimiento de diferentes infinitos en matemáticas trajo consigo una discusión sobre su existencia desde épocas muy tempranas. La filosofía éleática (siglo V a. de C.), a través de las paradojas de Zenón, intentaban mostrabar a filósofos-matemáticos que las concepciones que se tenían sobre el infinito llevaban a contradicciones. Aristóteles (384-322 a. de C.) quizo cerrar el capítulo argumentando que solamente existe un infinito en matemáticas (el infinito potencial) y que el infinito real no tenía cabida alguna. Una implicación de esta postura la podemos ver en el Axioma 8 de Euclides (325-265 a. de C.) : "El todo es mayor que la parte"; sin embargo, el querer contar con una matemática libre de contradicciones habría nuevamente la caja de Pandora… Muchos intentos se realizaron, pero se tuvo que esperar al trabajo de Kant (1790) en filosofía y de Bolzano (1817 y 1851) en matemáticas (sobre la continuidad de funciones y sobre las paradojas del infinito) para que la problemática sobre el infinito potencial y real se pudiera comprender mejor, pasando de un estatus contradictorio al de paradójico. Cantor (1883) propuso su teoría sobre los números transfinitos y la teoría de conjuntos, logrando proporcionar a las matemáticas una estructura que integra los diferentes infinitos. La resistencia de algunos matemáticos a aceptar esta teoría, dio como resultado la creación de la matemática intuicionista (Brower, 1930 ; Poincaré, 1905), que desde un punto de vista formal rechaza el infinito real, desarrollando así una matemática (diferente a la actual), que deja de lado una enorme cantidad de resultados; y en consecuencia, una gran mayoría de matemáticos no estaba y continua no estando a favor de esa postura. De allí la famosa frase de Hilbert (1925) acerca de que nadie lo sacaría del paraíso que les proporcionó Cantor. Paradójicamente, la matemática intuicionista cobró bríos en los años 60's con el desarrollo de la tecnología, en donde solamente tiene cabida el infinito potencial (ligado a los procesos recurrentes). Si a la comunidad matemática le tomó siglos poder comprender y manipular el infinito matemático en forma coherente, ¿debemos evadir una discusión sobre el infinito en el aula de matemáticas ? ¿Es posible aprender cálculo y análisis

matemático sin una cultura sobre el infinito ? Si un estudiante en el aula de matemáticas menciona lo siguiente : !El infinito es como el mar, si le añadimos una gota de agua, en realidad no le hemos añadido nada… ! Esta metáfora ¿es inadecuada?, ¿es importante?, ¿es superflua?… En este documento, intentaremos proporcionar al profesor de matemáticas y al investigador en didáctica de las matemáticas, una discusión rica sobre los problemas de aprendizaje del cálculo ligados al aprendizaje de la noción de infinito potencial e infinito real.

Introducción

El infinito es una expresión muy utilizada por los humanos para designar y describir diferentes fenómenos ligados a nuestra existencia y más allá de la misma… Es usual que la gente utilice éste término para designar algo ilimitado, “muy grande”. Es decir, que en general, los niños y jóvenes tienen alguna noción sobre el infinito cuando llegan al aula de matemáticas (un modelo intuitivo designado “modelo espontáneo” según Cornu, 1981). El infinito desde su aparición en filosofía y en matemáticas estaba ligado a una idea intuitiva sobre la posibilidad de ir más lejos, que no hay límite, esta idea intuitiva ligada al infinito potencial, fue aceptada de inmediato. En matemáticas, el pensar que a cada número siempre le podemos añadir la unidad, nos proporciona una idea intuitiva de que los números no tienen límite, siempre podemos construir otro número mayor. El problema surgió cuando cara a contradicciones era necesario concebir otro tipo de infinito.

¿Porqué construir otro tipo de infinito en matemáticas?

Desde la época de oro de los griegos (siglo V al III A. de C.), esta pregunta se la planteaban los filósofos-matemáticos de ese período. El problema consistía en que no todo podía ser explicado con el infinito potencial. Era necesario contar con otro tipo de estructura matemática para dar respuesta, por ejemplo, a la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga. La paradoja era fácil de entender, lo difícil era el de proporcionar una respuesta contundente. El hecho de que Aristóteles le proporcionara una atención especial, mostraba que la paradoja no podía ser respondida de manera inmediata con el conocimiento con el que se contaba en esa época.

Un hecho importante es que Aristóteles hace la distinción entre dos infinitos; sin embargo, toma la postura de que solamente existe uno de ellos que es útil para las matemáticas. Seguramente, influencia de esta postura Aristotélica fue que en los Elementos de Euclides apareciera el famoso axioma 8: "El todo es mayor que la parte". Desgraciadamente, este axioma que intentaba dejar de lado las contradicciones matemáticas de la época, no se podía aplicar ni siquiera al infinito potencial que era bien aceptado por los filósofos-matemáticos. Y el problema continuó durante varios siglos, las contradicciones aparecían constantemente cada vez que algún resultado matemático tenía que ver con el concepto de infinito.

Llegamos así a Galileo (p.e. Galileo, 1564-1642), un elemento importante que añadió Galileo a la discusión es el hecho de comparar dos conjuntos infinitos, los números naturales y el conjunto formado por sus cuadrados. El hecho de poder construir una asociación de un número y su cuadrado, y viceversa, daba inicio a otro tipo de acercamiento al problema del infinito. Por un lado, tenemos un conjunto (los números naturales) y un subconjunto propio (los cuadrados de los números naturales). Por otro lado, "podemos contar uno a uno" y vemos que "existe el mismo número de elementos de un conjunto como del otro" ¡Contradictorio desde un punto de vista intuitivo! Pues sí, Galileo concluyó que los atributos de "igual", "más grande" y "más pequeño", no tienen sentido para las cantidades infinitas (ver La Recherche, No. 84, p. 112, 1977).

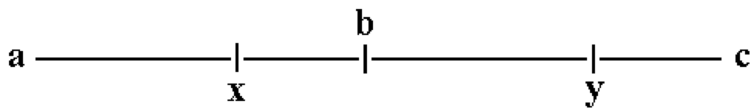
Antes de proseguir del lado matemático, debemos mencionar que Kant hace referencia a la posibilidad de pensar en dos tipos de infinito (ver Hitt 2003b). Kant (1790, § 26) en su "Crítica del Juicio" argumenta lo siguiente:

> *"...La mente atiende ahora a la voz de la razón, la cual, para todas las magnitudes dadas… requiere totalidad… sin excluir siquiera de este requisito al infinito, sino que, antes bien, hace inevitable que nosotros consideremos este infinito… como dado en su totalidad"*.

Con esto queremos señalar que en la filosofía Kantiana, el infinito real tenía cabida. Desde este punto de vista, Kant iba en contra de los fundamentos de la Iglesia Católica Romana, que a través de sus teólogos, por ejemplo Tomás de Aquino, habían rechazado el infinito real. Tal vez, esta posición kantiana preparó el terreno para intentar comprender el problema de los infinitos desde otra perspectiva.

Resulta que Bolzano (1851) explota la idea de Galileo, pero contrariamente a la posición de Galileo, Bolzano toma la postura de enfrentar una paradoja y no pensar que la situación es contradictoria. Este tipo de pensamiento abrió una nueva perspectiva, se le ocurrió que en lugar de pensar en una contradicción, mejor pensemos que esa propiedad que "a todas luces parece contradictoria", podía ser identificada para definir los conjuntos infinitos… Así, Bolzano argumenta sobre las propiedades de los conjuntos infinitos (Idem, p. 64-66):

> Pasemos ahora al análisis de una de las características más notables de los conjuntos infinitos, presente con frecuencia…
>
> Afirmo lo siguiente:
>
> (1) Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible que cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro; y
>
> (2) que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables.



a b : a c = a x : a y

Figura 1

Podríamos pensar que los problemas se acababan en ese momento, pero la historia tiene la última palabra… El problema continuó en una nueva dirección.

El trabajo de Cantor (1883) le proporcionó a las matemáticas la estructura necesaria para poder integrar los dos tipos de infinito, el potencial y el real. Bueno, eso pensó una gran mayoría de matemáticos una vez que pasó el "filtro". Uno de sus opositores Kronecker, mencionaba que Dios nos proporcionó los números naturales, y con eso nos bastaba. Cantor tuvo serios problemas para publicar sus trabajos y los opositores le hicieron la vida muy complicada… Cantor se refugió en la teología y llegó incluso a afirmar que Dios escribía utilizando como medio sus manos… (ver La Recherche, No, 84, 1977). De hecho, tuvo una correspondencia muy nutrida con cardenales de la Iglesia Católica Romana para contar con un apoyo para su teoría, que finalmente la obtuvo cuando afirmó que el infinito absoluto no pertenecía más que a Dios; las criaturas, gozan de un infinito real de segunda mano (una especie de eco del infinito divino). El Cardenal Franzelin hizo saber a Cantor que esa distinción era teológicamente satisfactoria (ver La Recherche, Idem).

Una vez que los matemáticos poco a poco fueron aceptando la teoría cantoriana, desde luego haciendo a un lado el aspecto teológico de la teoría, algunos consideraron que Cantor les proporcionaba un espectro muy amplio para desarrollar la matemática, "un paraíso" en las palabras de Hilbert.

Si hablamos de las minorías, por ejemplo, de Brower y Poincaré, resulta que ellos consideraban importante conservar cierta pureza en el pensamiento matemático, y se oponían a considerar otro tipo de infinito. Es así que tuvo nacimiento la teoría intuicionista que no admite el infinito real. Por cierto en el 2007 cumplió 100 años y se festejó con un congreso…

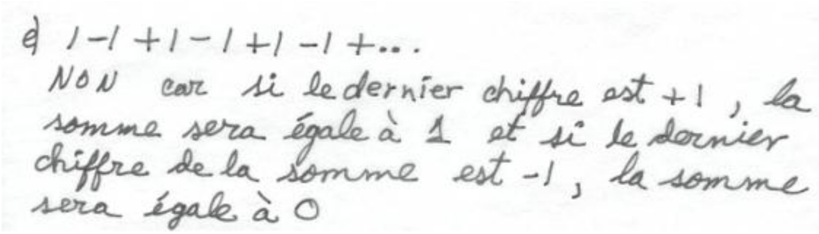
Para cerrar este apartado, consideremos que una vez formalizada la teoría de conjuntos, las ideas sobre los conjuntos infinitos de Bolzano podían ser interpretadas bajo esa teoría, dando como resultado la definición siguiente:

> *Un conjunto A es infinito, si existe un subconjunto propio B de A, es decir, un subconjunto $B \subset A$ tal que $A \neq B$, tal que existe una biyección $f: A \to B$ entre A y B.*

¿Podemos considerar al infinito como un obstáculo epistemológico?

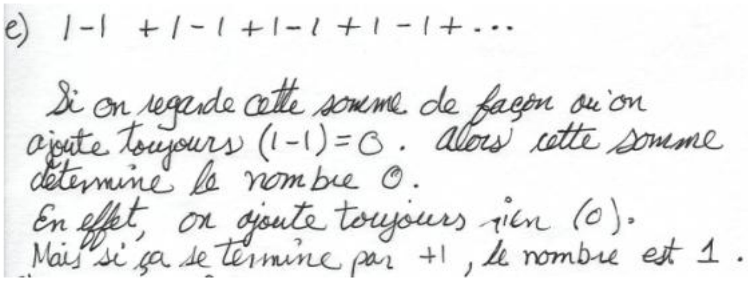
Considerando el trabajo de Brousseau (1997), con respecto a la noción de obstáculo epistemológico, lo primero que debemos hacer es identificar un problema de aprendizaje en el aula. Veamos algunas producciones de estudiantes de licenciatura que estudian para ser profesores de matemáticas en el nivel secundario en Québec (la secundaria en Québec es de 5 años). Hemos puesto diferentes respuestas a la misma pregunta:

La serie que viene a continuación, ¿es convergente? Explique : 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +…



e) $1-1+1-1+1-1+\ldots$

NON car si le dernier chiffre est +1, la somme sera égale à 1 et si le dernier chiffre de la somme est -1, la somme sera égale à 0

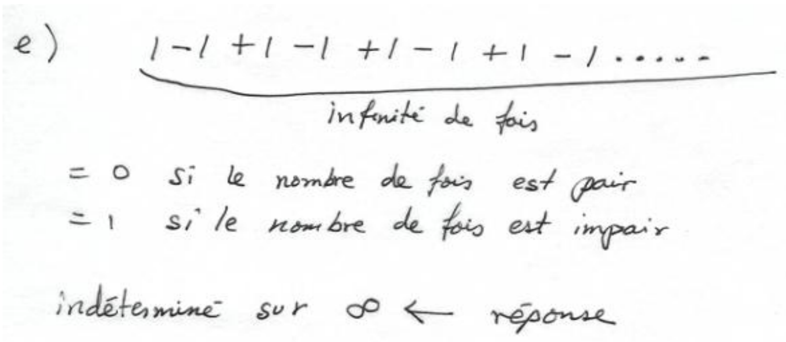


e) $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$

Si on regarde cette somme de façon où on ajoute toujours $(1-1)=0$. Alors cette somme détermine le nombre 0.

En effet, on ajoute toujours rien (0).

Mais si ça se termine par +1, le nombre est 1.



e) $\underbrace{1-1+1-1+1-1+1-1\ldots\ldots}_{\text{infinité de fois}}$

= 0 si le nombre de fois est pair

= 1 si le nombre de fois est impair

indéterminé sur ∞ ← réponse

Figura 2

Los problemas que muestran los estudiantes es que en una sucesión o serie, una gran mayoría considera la posibilidad de hablar sobre el último término. Este problema se repite una y otra vez en las situaciones que planteemos a los estudiantes. Otro ejemplo, en la explicación de que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, algunos estudiantes piensan que para “n muy grande 1/n se convierte en cero” (ver Páez, 2001), o que una sucesión de cuadrados encajados, “su último término es un punto” (ver Páez, 2004).

Prosiguiendo con las ideas de Brousseau sobre la noción de obstáculo epistemológico, ahora debemos identificar problemas similares en el desarrollo de la matemática. Nos podemos preguntar si los matemáticos de épocas antiguas no tenían esos problemas. Analizaremos en lo que sigue una correspondencia entre Leibniz y Wolf de 1713. En una carta, Wolf le solicitaba a Leibniz que pudiera opinar sobre un resultado encontrado por Guido Grandi, ya que había un matemático (Marchetti) que refutaba el resultado. El objeto de reflexión trataba sobre lo siguiente :

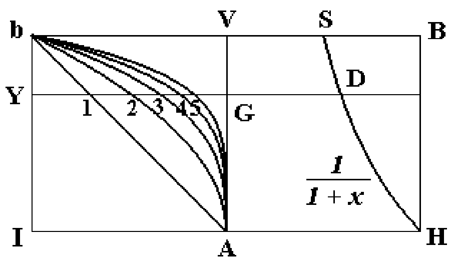
$$1-1+1-1\,\textit{etc. à l'infini} = \frac{1}{2}$$

Los argumentos proporcionados por Guido Grandi se apoyan sobre dos tipos de representación (ver Hitt, 2005b) :

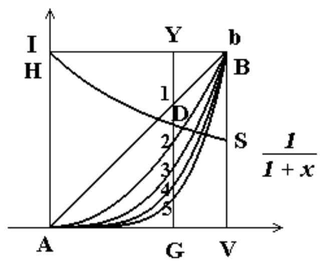
- Visual (para x = 1, se obtiene 1/2, ver figura), apoyándose en un resultado anteriormente encontrado por otros matemáticos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4\ \textit{etc. al infinito}$$

- Explicación en lenguaje natural (intuitivo), acerca de una historia de dos hermanos que comparten una joya, quedando en posesión la joya un año con uno y el siguiente con el otro. Si el proceso es llevado al infinito, cada uno de ellos será poseedor de la joya la mitad de los años.



Representación gráfica tratada por Guido Grandi



Interpretación actual

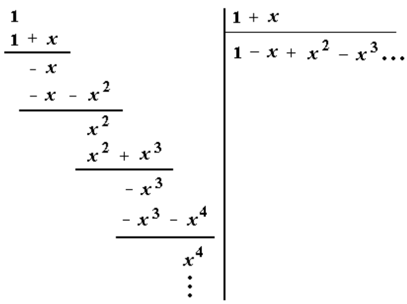
Figura 3

La respuesta de Leibniz es la siguiente :

"*Tu me solicitas a mí, Hombre Tan Célebre, lo que yo pienso sobre la cuestión del Muy Célebre Guido Grandi, si 1-1+1-1+1-1 etc. al infinito se obtiene 1/2 ; y cómo lo absurdo que parece mostrarse en ese enunciado, podría ser evitado*". Argumentos de Leibniz:

- Leibniz está convencido que la representación visual es correcta: « La figura empleada por el *Maestro Grandi* salta a los ojos de una cierta manera ».
- Leibniz se apoya del resultado visual basándose sobre su « Ley de Continuidad »: « Y ello está de acuerdo con la *Ley de Continuidad* propuesta antes por mí, primero, en las Nouvelles Littéraires de Bâle y aplicada a las leyes del Movimiento ; donde es un hecho que en los continuos, el extremo excluido puede ser tratado como incluido.»
- Puesto que la *Serie infinita*, es decir 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. al infinito, de tal suerte que ella excede un número cualquiera ; entonces por la naturaleza difusa del número, la asignación del par o del impar es todavía difusa, y puesto que no hay razón alguna para lo par o impar, y por tanto de producir 0 o 1, es por una admirable disposición de la naturaleza, que por el paso de lo finito a lo infinito, el paso después de la disyuntiva (por tanto terminada) a la unidad positiva (que subsiste) llegará a ser la media entre las disyuntivas… se debe tomar la media aritmética que es la mitad de la suma,… resulta $\frac{0+1}{2}$, que es lo que se había propuesto.

El problema continuó durante varias décadas, por ejemplo, D'Alembert señala que las demostraciones dadas al cálculo de la serie en cuestión son erróneas. En su enciclopedia (Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, 1751), D'Alembert indica que Pierre Varignon (1715) puso en claro el uso de la división ilimitada, utilizada para encontrar el resultado



$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 \textbf{\textit{ etc. à l'infini}}$$

Figura 4

D'Alembert en relación a esto escribe :

El error de este autor [refiriéndose a Guido Grandi] procedía de la falta de observación de que 1 - 1 + 1 - 1, etc y en general $1 - c + c^2 - c^3$, etc no expresa exactamente el valor de la fracción $1/(1 + c)$. Puesto que suponiendo que se realice la división hasta cinco términos, como la división no es exacta, siempre queda un residuo. Sea r este residuo; para tener el cociente exacto, es necesario, como en la división ordinaria, añadir este residuo r dividido por el divisor 1 + c, a la parte ya encontrada del cociente. Así, supongamos que la serie general se termine en $-c^3$, se tendrá :

$$\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{r}{1+c} = \frac{1 - c + c - c^2 + c^2 - c^3 + c^3 - c^4 + r}{1+c}$$

[de aquí que $r = c^4$]

$$\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c}$$

Por consecuencia, el valor exacto de $1/2 = 1/(1 + 1)$ es

$1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$ y este valor es siempre igual a 1/2 y no a cero o 1.

Parece que en matemáticas las cosas simples tienen grandes repercusiones… La historia nos muestra las dificultades con las que se enfrentaron estos grandes matemáticos, intentando justificar que $1 - 1 + 1 - 1\,\textit{etc. al infinito} = \frac{1}{2}$.

En la actualidad basta con que construyamos la sucesión s_n, de la siguiente manera : $s_1 = 1$, $s_2 = 1 - 1$, $s_3 = 1 - 1 + 1$, $s_4 = 1 - 1 + 1 - 1$,… Debemos entonces mostrar que $\{s_{2n}\}$ converge a cero y $\{s_{2n+1}\}$ converge a 1; y dado que si el límite de una sucesión existe, este debe ser único y que dada una sucesión tenemos dos de sus subsucesiones con límites diferentes, entonces el límite de la sucesión s_n, no existe.

¿Por qué estos grandes matemáticos tuvieron esas dificultades? ¿Podemos considerar que la serie: 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … es tan simple que no debiera haber generado mayor problema?

La historia nos ha mostrado que la manipulación del infinito merece que lo tratemos con respeto y de acuerdo a la noción de obstáculo epistemológico, se le trate como tal.

Una "tabla de valores ligada al infinito"

Si analizamos los textos antiguos, la manera de presentar ideas no formales alrededor del infinito, no ocasionaba demasiado malestar entre los matemáticos. El malestar aparecía cuando esas ideas no formales eran utilizadas en un proceso formal. Es el caso de las reacciones al uso del infinitamente pequeño, por ejemplo. Sin embargo, había una especie de acuerdo implícito de la manera para presentar al infinito sin que algunos pensaran que era inadecuada. Por ejemplo, en el "Cours d'Analyse" de Cauchy (1821) podemos encontrar la tabla siguiente (Traducción MATHEMA, 1994, p. 101):

para la función				
$a+x$	a desiga una cantidad cualquiera	$a+(-\infty)=-\infty$	$a+\infty=\infty$	…
$a-x$	a desiga una cantidad cualquiera	$a-(-\infty)=\infty$	$a-\infty=-\infty$	…
ax	a designa una cantidad positiva	$a\times(-\infty)=-\infty$	$a\times\infty=\infty$	…
	a designa una cantidad negativa	$a\times(-\infty)=\infty$	$a\times\infty=-\infty$	…
$\frac{a}{x}$	a designa una cantidad positiva	$\frac{a}{-\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\pm\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$
	a designa una cantidad negativa	$\frac{a}{-\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\mp\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$

Figura 5

Si bien esta notación no causó muchos problemas entre los matemáticos de esa época, no parece ser lo mismo con los estudiantes actuales. A continuación quisiera mostrar un extracto de un libro de Beaudoin & Laforest (1993, pp. 34-35) que ganó un premio por su simplicidad pedagógica y presentación didáctica.

2.19 Cinquième cas d'exception : Forme $\frac{c}{0}$, $c \neq 0$

Dans la forme $c/0$ $(c \neq 0)$, la difficulté provient du fait que la division par zéro est impossible. On résout le cas en calculant la limite à gauche et la limite à droite. Si les deux limites coïncident (V. Remarque ci-après), elles constituent la limite cherchée. Dans le cas contraire, la limite n'existe pas.

Exemple 1

Si, pour calculer la limite :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+4}{x-2},$$

on procède en remplaçant x par 2 dans la fonction, on arrive à la forme indéterminée $c/0$ $(c \neq 0)$. Tel que suggéré ci-dessus, allons-y pour les limites à gauche et à droite. Pour la limite à gauche, on a :

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x+4}{x-2} = \frac{4+4}{2^- - 2} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

et, pour la limite à droite :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x+4}{x-2} = \frac{4+4}{2^+ - 2} = \frac{8}{0^+} = +\infty.$$

La limite cherchée n'existe donc pas, puisque la limite à gauche est différente de la limite à droite.

Figura 6

De inmediato se puede ver que la manera de introducir los ejemplos es errónea, aquí los autores promueven la substitución; y a la larga, ello va a provocar un obstáculo ligado a la manera como se enseña. Sigamos con la siguiente página.

Remarque

Lorsqu'on écrit une expression comme :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

c'est par « abus de langage » qu'on s'exprime de cette manière et qu'on se permet d'affirmer que la limite concernée *existe*, puisque, précisément, l'infini n'existe par en tant que nombre. Cependant, pour la commodité et conformément à l'usage, nous continuerons d'utiliser ces manières de s'exprimer.

> [Traducción libre del autor] *Observación*
> *Cuando se escribe una expresión como*
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
> *Es por "abuso de lenguaje" que se expresa de esta manera y que se permite afirmar que el límite correspondiente* ***existe****, puesto que, precisamente,* ***el infinito no existe como número****. Sin embargo, para la conveniencia y de acuerdo con el uso, seguiremos utilizando estas maneras de expresarse.*

Figura 7

Este acercamiento nos muestra que los autores se dirigen a los estudiantes de manera confusa, propiciando un obstáculo (didáctico) por la manera como se enseña.

¿La notación sobre el cálculo de límites es adecuada en matemáticas?

La evolución por la que ha pasado la notación matemática es sorprendente. Podemos mencionar la resolución de ecuaciones cuando las ecuaciones estaban descritas con palabras, la resolución requería de un esfuerzo grande para poder retener la información. Pero en esta evolución, que para los matemáticos es fundamental, en el aprendizaje de las matemáticas tiene sus consecuencias. La notación matemática es de suma importancia para los estudiantes, y el profesor de matemáticas debiera tener esto presente.

En la tesis de doctorado de Páez (2004), en su experimentación con profesores de matemáticas, existe una parte donde los profesores discuten sobre lo que significa la expresión: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, y la discusión entre los profesores muestra el gran problema que existe, aún entre los profesores de matemáticas, en la construcción del concepto de limite. En la discusión al resolver una de las actividades relativas a unos triángulos encajados, uno de los profesores (Pedro en este caso) señala:

> *Decir que este proceso llega a su fin es aceptar que la infinita área es cero y esto contradice el concepto de infinito, por mucho que nuestra mente se imagine un diminuto triángulo siempre se va a encontrar una diminuta área, por lo tanto el proceso nunca llegará al final.* (p. 89)

En otra actividad sobre unos cuadrados encajados, la discusión entre los profesores (Idem, p. 89) sigue este mismo parámetro:

> *Dos del grupo* [María y Víctor] *creen que no se llega a un valor, que estas sumas se acercan cada vez más a la unidad pero nunca se llegará a este valor, esto debido a que el proceso de construcción de los cuadrados es infinito, o sea, no se llega a un fin… El otro punto de vista* [Pablo] *es que se llega a un valor, a 1, para ello se realiza la siguiente suma* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$ *o lo que es algo más significativo* $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},...,\frac{2^n-1}{2^n}$ *cada valor que se obtiene, es cada vez más cercano a la unidad, de ahí* $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=1-0=1$ *Por lo que si se llegara a un fin, este sería 1.*

Después de varias sesiones, algunos profesores llegaron a la conclusión que la notación matemática utilizada en clase no era la correcta ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$), que en su lugar se debería utilizar otro tipo de notación como: $\lim_{n\to\infty} a_n \to a$, hubo una profesora que se oponía, argumentando que esa notación era redundante y falta de elegancia. En consecuencia, ello implicó la búsqueda de otra notación por parte de los que estaban a favor de lo inadecuado de la notación, proponiendo ahora: $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Estos pasajes nos muestran que efectivamente, el problema de aceptar el infinito real no es trivial, y ello promueve una cantidad enorme de falsas concepciones.

Discutamos con un ejemplo lo arriba expresado por los profesores. A lo que llegamos con nuestra observaciones es que en realidad interpretamos el signo de igualdad de diferentes maneras. Por ejemplo, pongamos la "demostración" que surgió entre los profesores en su discusión de lo siguiente 1=0.999…:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0.333...+0.333...+0.333...=0.999...$$

Un profesor argumentaba que la tercera igualdad presuponía el hecho de que es posible sumar cantidades que tienen una infinidad de dígitos, él exigía que le explicaran el algoritmo para sumar: "dónde empiezo a sumar".

Podemos decir que $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ya que contamos con un algoritmo que nos permite pasar de una representación a la otra; pero los problemas empiezan cuando utilizamos el signo de igualdad para decir que $\frac{1}{3}=0.333...$ ¿Qué queremos decir con esa igualdad ?

$$0.333...=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...=3\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...\right)=3\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)=3\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right)$$

Pero nuevamente estamos utilizando la igualdad en varios sentidos :

- ¿Qué nos permite factorizar el 3 de la expresión $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...$?
- ¿Por qué $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+...+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)=\frac{1}{9}$?

Pongamos $S_n=\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+...+\left(\frac{1}{10}\right)^n$, entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}$; y hemos regresado al punto de partida… ¿Qué significa el signo de igualdad en $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}$?

Y en esa pregunta tan simple, se encuentra toda una historia… De hecho, la pregunta nos envía a la noción de infinito real ; $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}$ significa que para cada vecindad de 1/9, podemos encontrar un n_0 tal que los primeros S_n antes de S_{no}, se encuentran al exterior de la vecindad y el resto (que es una infinidad) se encuentran al interior de la vecindad de 1/9. Precisamente, el logro más grande de Bolzano está en el hecho de que con su novedoso acercamiento, ***evita hablar de la idea intuitiva de que los S_n tienen movimiento y de que se van acercando a 1/9. El infinito real no está ligado a movimiento alguno. Todos los S_n están allí, nada se mueve***. Debemos entender la expresión $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}$ como una unidad completa. Por ejemplo, cada vez que vemos el anuncio de no fumar, no nos fijamos en las diferentes formas que comprenden el anuncio, al mirar el anuncio, un concepto viene a la mente y lo entendemos como un todo. En el caso de $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$, desde el punto de vista del infinito real, lo debemos entender como no importando la vecindad que nos proporcionan de 1/9, si fuera de la vecindad hay un número finito de elementos, entonces podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$. La gran astucia de Bolzano fue de darle la vuelta al problema de si se alcanza o no el límite… Con el infinito real ya no me intereso a si el límite es alcanzado o no; lo que me interesa es el cumplimiento de ciertas propiedades, que si se cumplen, entonces escribo $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$. Estas propiedades tienen que ver con la definición, que aplicada a este caso, debemos considerar que: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \ni si\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| S_n - \frac{1}{9} \right| < \varepsilon.$

El problema principal radica que para poder comunicar estos conceptos en el aula, el lenguaje natural va en contra del acercamiento mencionado en el párrafo anterior. En palabras, decir que $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$, lo decimos de la siguiente manera: "el límite de S_n cuando n tiende al infinito es igual a 1 sobre 9". Al utilizar "cuando n tiende al infinito" le estamos proporcionando movimiento a los S_n, estamos haciendo un uso implícito del infinito potencial.

Como vemos, el comprender las diferencias entre el infinito potencial y real para enseñar el concepto de límite, aún y cuando el profesor de matemáticas haya adquirido cierta cultura con respecto a los problemas de aprendizaje de los estudiantes y de la historia de las matemáticas, queda el problema del lenguaje natural para comunicar esos conceptos. ¿Qué hacer? Probablemente es aconsejable proponer actividades en donde se promueva el surgimiento de controversias sobre el infinito (como lo realizado en la experimentación de Páez) y promover una mayor reflexión sobre el infinito matemático.

También nos podemos preguntar para quién es importante contar con una mejor idea sobre el infinito real. Para un estudiante de ciencias es ineludible, pero ¿Es importante para un estudiante de ingeniería? Probablemente sea menos importante; sin embargo, para un profesor de enseñanza media sí lo es, ya que algunos de sus estudiantes seguirán estudios superiores en ciencias.

El aprendizaje del cálculo y la articulación entre registros

En el aprendizaje del cálculo se acumulan una gran cantidad de conocimientos que se añaden al de comprender el infinito potencial y real. Por ejemplo, solicitamos a un profesor de enseñanza media que proporcionara una definición de derivada de una función en un punto (ver Hitt, 2003a).

El profesor señaló que una función *f* es derivable en un punto “*x*” si el siguiente límite existe: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Al solicitarle que explicara gráficamente la expresión algebraica, mostró algo semejante a la figura adjunta. Figura clásica que se encuentra en los libros de texto.

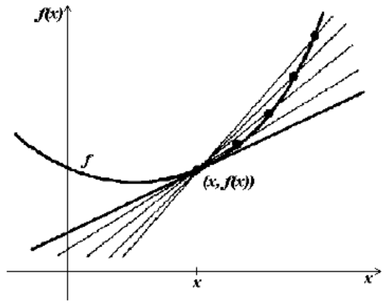


Figura 8

Enseguida, se le pidió que graficara la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad x\le 0\\ (x-1)^2 & si \quad x>0\end{cases}$$

y que la analizara para “ $x = 0$ ”. El profesor realizó un dibujo como el siguiente y afirmó que la derivada en $x = 0$ era igual a cero (ver figuras 9 y 10).

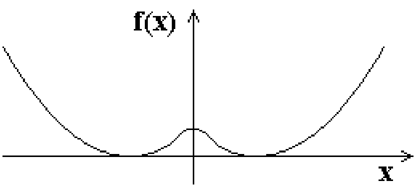


Figura 9

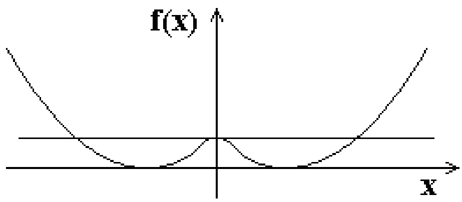


Figura 10

Mi sugerencia en ese momento fue que tomara su idea geométrica como conjetura y que la justificara con un proceso algebraico. Su respuesta fue:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h-1)^2-(0+1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-2)=-2$$

Al preguntarle sobre la contradicción existente entre su representación gráfica y su resultado algebraico, el profesor tuvo que realizar un análisis de su definición para finalmente encontrar el error. Ello muestra que el profesor tenía la idea de que **h es estrictamente mayor a cero**, no concebía que h pudiese tomar valores negativos. Si analizamos diferentes libros de texto, nos podemos percatar que regularmente en los ejemplos, solamente se muestran funciones y sus respectivas representaciones geométricas de la derivada para valores de h positivos. Parece natural entonces pensar, que esa falta de articulación entre representaciones, se deba también a un problema ligado a la manera como se enseña.

El aprendizaje del cálculo y el rol de la tecnología en la promoción de la articulación entre registros

Hasta muy recientemente se ha empezado a entender el porqué la tecnología no ha logrado tener un impacto serio en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Artigue (2000) señala del porqué en los últimos 20 años de instrucción en ambientes tecnológicos no ha habido un impacto real en el aula de matemáticas, y nos proporciona cuatro puntos de reflexión:

1. La reducida legitimidad de las tecnologías computacionales como opuesta a la legitimidad social y científica.
2. La sobre estimación de los resultados ligados al conocimiento matemático en ambientes tecnológicos.
3. La oposición dominante entre la dimensión técnica y la dimensión conceptual de la actividad matemática.
4. La sobre estimación de la complejidad de los procesos de instrumentación. (pp. 8-9)

En Hitt (2007b), hemos realizado una reflexión acerca de los problemas de aprendizaje en medios tecnológicos. Por ejemplo, Guin & Trouche (1999, p. 197), señalan que a dos grupos de 50 estudiantes (pre-universitarios) se les solicitó resolver el siguiente problema. Calcular: $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{ln\ x + 10\ sin\ x}$, los resultados que obtuvieron fueron:

Con calculadora: 10% de éxito.
Sin calculadora: 100% de éxito.

Este estudio nos muestra la importancia que debemos proporcionarle a una enseñanza con tecnología y a la importancia en la promoción de una articulación entre representaciones. Siguiendo un marco teórico como el de Duval (1993), ello implica un trabajo consistente en tareas de conversión entre representaciones, y por tal motivo, un diseño especial de actividades a desarrollar en el aula de matemáticas.

Discusión

Las autoridades educativas tanto como los profesores de matemáticas saben sobre los grandes problemas de los estudiantes en el aprendizaje del cálculo. Una prueba de ello son las estadísticas sobre la deserción escolar en la enseñanza media y primer año de universidad en donde las materias de cálculo juegan el rol de “verdugo”. Lo que no se sabe es cómo resolver este problema.

Hemos querido enfatizar diferentes niveles en los problemas del aprendizaje del cálculo. Uno de ellos es la importancia que se le debe proporcionar a los problemas de conversión entre representaciones. Este acercamiento es notorio en los libros de texto de los últimos años, por ejemplo en los Estados Unidos. Sin embargo, un problema mayor sigue persistiendo, que es que el aprendizaje sobre el infinito está ligado a sobrepasar un obstáculo de corte epistemológico, y que ello conlleva a realizar un acercamiento de enseñanza con mucho más cuidado que lo que hasta ahora se ha propuesto.

Nuestra posición es que se debiera proporcionar un espacio especial a una discusión sobre el infinito y/o los infinitos; y el realizar un diseño de actividades que sean trabajadas en un ambiente de aprendizaje en colaboración (ver Hitt & Borbón, 2004; Hitt & Páez, 2004; Hitt, 2005a; Hitt, 2007a). Además, que el profesor sea sensible a reconocer la importancia de las representaciones espontáneas de los estudiantes y no imponer las representaciones institucionalizadas de golpe (ver Hitt, 2003 y 2004; Duval, 2006). Hemos visto en este documento que aún los profesores tienen dudas sobre la notación matemática, de allí de la importancia de analizar las representaciones espontáneas de los estudiantes.

Referencias

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of GDM*. Potsdam (Download: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/ gdm/2000).

Beaudoin G & Laforest J. (1993). Calcul différentiel et intégral. Les Éditionns BL. Montréal, Québec.

Bolzano B. (1991). *Las Paradojas del Infinito*. México : Colección MATHEMA. Traducción del original de 1851.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4.2, pp. 164-198.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht, Kluwer.

Cantor G. (1955). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Republication of the original translation of 1915. New York : Dover Publication, Inc.

Cauchy A. (1994). Curso de análisis. Traducción del original : Cours d'Analyse, MATHEMA, México.

Cornu B. (1981). Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propes. *Proceedings PME-V, I,* 322-326. Grenoble, France.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65. In F.Hitt (Ed., 1998), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval Raymund (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61: pp. 103-131.

Guin D. & Trouche L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 195-227.

Hitt F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construccion de Conceptos Matematicos en Ambientes con Tecnologia. Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana, Vol. X, No. 2, pp 213-223.

Hitt, F. (2003b). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. . En F. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A.

Rivera, S. Ursini (Editores), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*. Fondo de Cultura Económica (FCE, maison éditoriale), pp. 91-111. ISBN: 968-16-7028-0.

Hitt F. & Paez R. (2004). On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of PMENA*, 2004. Toronto, Canada, pp. 103-110.

Hitt F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. En Gisèle Lemoyne (Rédactrice), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude*. Volume XXX, no. 2, pp. 329-354.

Hitt F. & Borbón A. (2004). Teachers' conceptions related to differential calculus' concepts. *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of PMENA*, 2004. Toronto, Canada, pp. 143-150.

Hitt, F. (2005a). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. In *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza.* J. C. Cortés & F. Hitt, éds. Morevallado Editores, Mexico, pp. 81-108.

Hitt F. (2005b). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? Une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM* 2004. Éditeur Denis Tanguay, Université de Québec à Montréal, pp. 135-146.

Hitt F. (2007a). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Hitt F. (2007, en proceso). Investigaciones en ambientes tecnológicos, marcos teóricos y metodológicos: Un punto de vista pragmático. *Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matématicas*. Cuernavaca, México, Septiembre, 2007.

Le petit savant illustré. (1977). Dieu, Cantor et l'infini. *La Recherche*, No. 84, Décembre 1977.

Páez R. (2001). *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN. México.

Páez R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Tesis de d