Cálculo y Tecnología

Carlos Armando Cuevas Vallejo & François Pluvinage
DME-Cinvestav-IPN & IREM de Strasbourg
México - Francia

Resumen. En este artículo se propone una reestructura curricular, para un primer curso de cálculo diferencial, acorde al desarrollo epistemológico de los conceptos y la introducción de la tecnología en los cursos. El objetivo es poder instrumentar un programa didáctico, que conlleva la simulación de situaciones reales, para introducir conceptos matemáticos y la actividad individual del educando, mediante el empleo de escenarios virtuales de aprendizaje y la utilización de un entorno tutorial inteligente, como apoyo en un curso tradicional de cálculo a nivel universitario.

Palabras claves: Cálculo diferencial, Tecnología, Simulación, Escenarios virtuales de aprendizaje, Entorno tutorial inteligente.

1. Introducción

El cálculo diferencial e integral es el estudio de las funciones, por ende la enseñanza del mismo tiene como propósito mostrar propiedades importantes de las funciones. Al ser las funciones, el modelo matemático por excelencia de casi cualquier ciencia, el cálculo diferencial e integral constituye materia obligada, en la currícula de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso en carreras del área de ciencias sociales. Sin embargo, los reportes de fallas en el aprendizaje del cálculo son frecuentes y por ende este es uno de los problemas que más preocupa a la comunidad educativa (ANUIES 2002). Tradicionalmente los resultados de aprobación que se obtienen en el curso de cálculo son muy bajos, esto es palpable en las carreras de ingeniería en México, donde en este curso se tienen porcentajes de reprobación de más del 70 % (Steen, 1987; Cuevas, 1996; Baker et.al. 2001). En este sentido, Tall (1996) menciona citando a Anderson & Loftsgaarden (1987) y a Peterson (1987), que a pesar de que los alumnos se someten a un régimen pesado de ejercicios de cálculo, el porcentaje de fracasos en este tema oscila entre el 30% y 50% (cf.).

Sin intentar minimizar aspectos de corte socioeconómico y político, indudablemente que una de las posibles razones de este fracaso, es que la enseñanza de las matemáticas, y en particular el cálculo, se polariza en dos extremos: por un lado ésta se conduce con una fuerte carga operativa en deterioro de la parte conceptual, y por el otro, la enseñanza del cálculo se ejerce con fuerte herencia de la matemática formal. Ambas conducen a una pobre comprensión de los conceptos y de su aplicación. Incluso, es creencia común en los estudiantes que hacer matemáticas significa hacer operaciones puntuales, manipular signos y memorizar (Skemp 1976, Orton 1983, Carpenter 1996).

Por ejemplo, usualmente la enseñanza del cálculo diferencial parte de enunciados, teoremas y problemas tipo, que ejemplifican los conceptos asociados, y se apoya fundamentalmente, en el conocimiento algebraico del estudiante y poco en la intuición geométrica y visual. Esto, posiblemente, debido a la dificultad de representar en el papel o el pizarrón un número suficientemente grande de ejemplos, que den significado geométrico a los contenidos del cálculo y al álgebra involucrada en ellos. En este sentido, se hace necesario rescatar el desarrollo del cálculo mediante problemas de cambio y variación surgidos de la física, los cuales ayudan a reforzar la intuición. En la actualidad, los problemas de cambio y variación son ejemplos de aplicación del cálculo; es decir, se estudian después de que se ha desarrollado la teoría, y no como surgió históricamente (Grabiner 1983).

Otro importante factor de fracaso, que observamos en los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas diagnósticas, tiene que ver con las deficiencias en el conocimiento del concepto general de función y de los conceptos relacionados: variable independiente, variable dependiente, parámetro y ecuación (Cuevas et al 2005, Bloch 2003, Habre & Abboud, 2006; Trigueros & Ursini 2003). Nuestra propuesta es compensar estas deficiencias no a través de cursos remediales, cuyos efectos nunca han sido satisfactorios, sino con el uso adecuado de los recursos de la computación.

2. Una perspectiva histórica

Al analizar los programas curriculares tradicionales de cálculo diferencial, se percibe que la mayoría presentan en primer lugar, números reales y funciones algebraicas. Este estudio, comprende los axiomas de campo y orden. Continúa, el programa, con el estudio de límites como prerrequisito para el estudio de continuidad y derivación; enseguida se dan las aplicaciones de la derivada que casi siempre son incompletas, sobretodo en la parte de máximos y mínimos. Una primera dificultad detectada en el problema de comprensión y aprendizaje, es unir los obstáculos epistemológicos del concepto de límite con el concepto de derivada (Cornu 2002, Tall & Vinner 1981, Sierpinska 1996, Andreu & Riestra 2007). El concepto de límite, aun cuando se pretenda introducirlo de manera "intuitiva", puede ser un factor importante de fracaso estudiantil. Por ello, proponemos una ruta de aprendizaje acorde al desarrollo epistemológico y, a la vez, congruente con sus antecedentes matemáticos.

Detallemos nuestra propuesta. El orden y temas de un primer curso tradicional de cálculo diferencial, en el nivel universitario, es el siguiente:

- Números reales.
- Funciones reales.
- Concepto de límite.
- Derivada de una función real en un punto.
- Reglas y resultados de la derivada.
- Aplicaciones de la derivada

Sin embargo, la historia muestra que el desarrollo de los conceptos es muy distinto a la forma en que actualmente se presentan los contenidos curriculares del curso de cálculo. Por ejemplo, en los siglos XVIII y XIX el estudio completo de los números reales se relacionó de manera estrecha con la resolución de problemas encontrados con el tratamiento de funciones. Por ejemplo, el hecho de que una condición de convergencia simple, no es suficiente para que una sucesión de funciones continuas, tenga como límite una función continua. Este ejemplo nos muestra que el orden de aparición de los temas de cálculo es contrario a las necesidades que dieron origen a su estudio y formalización.

Por otra parte, al no tomar en cuenta la historia del desarrollo del cálculo, se pierde la riqueza de la exploración de problemas que dieron origen al cálculo; como por ejemplo: El trazado y descripción del comportamiento de una curva, donde es posible evidenciar la necesidad de los conceptos como la monotonía, máximos y mínimos, concavidad, etc. Al no tomar en cuenta estos resultados, se descuida nuevamente la intuición geométrica y los resultados importantes del cálculo, que surgen de la resolución de problemas de curvas en la historia.

En síntesis, se puede decir, a grandes rasgos, que el contenido del curso de cálculo que se desarrolló entre los siglos XVI y XIX, o el orden histórico de los estudios fue el siguiente:

- Variaciones de polinomios y derivada de un polinomio
- Relación entre tangente a una curva y derivada (Barrow); derivada de las funciones algebraicas y nacimiento del cálculo (l'Hôpital)
- Funciones trigonométricas y transcendentes (logaritmo y exponencial) y su derivada (Newton, Leibniz), desarrollos de Taylor y series
- Consideración general de funciones reales por Euler, sin poseer una definición formal del objeto función
- Estudio de problemas de convergencia de series y continuidad (Fourier)
- Definición formal de los números reales y de la derivada en un punto como límite (Weierstrass).

De la comparación entre ambas progresiones resulta una fuerte incoherencia, que puede aclarar en parte las dificultades observadas en la enseñanza del cálculo. En particular, tradicionalmente se presentan simultáneamente dos conceptos con comprobada dificultad de aprendizaje: límite y derivada. Por lo cual, se explica la falta de comprensión por una proporción importante de la población estudiantil, sobre todo en las carreras de ingeniería y ciencias sociales. Con esto no se quiere decir, que, el concepto de límite no estaba presente en el desarrollo de la matemática anterior a Weierstrass, puesto que como sabemos, este concepto se presentó desde la época griega en contextos algorítmicos o geométricos, o en el estudio de movimientos (cinemática) (v. gr. antiféresis relacionada con desarrollos en fracciones continuas, paradoja de Zenón, tangente como posición límite de una cuerda). Sin embargo, el cálculo se aplicaba sin toda la carga de rigor que posteriormente se desarrolla.

La geometría analítica de Descartes, estableció un puente entre geometría y cálculo, sin reducir ambos dominios a un único tipo de pensamiento matemático.

De forma paralela al razonamiento geométrico, una herramienta que tuvo un papel histórico importante fue la tabulación. En efecto, para realizar cálculos numéricos, se utilizaban tablas de valores numéricos; y hasta principios de la era de la micro-computación, el uso de tablas trigonométricas y de logaritmos, como herramienta para cálculos complejos, era parte de la curricula escolar.

De lo anterior y de un estudio y análisis de la historia, resultan algunas propuestas de líneas directrices para la enseñanza del cálculo diferencial.

La primera consiste en sugerir que un primer curso de cálculo diferencial no debe construirse sobre el conocimiento previo de estructuras formales de los números reales y definiciones formales del concepto de función.

La segunda es que tampoco es necesario construir el curso de cálculo sobre la noción de límite, puesto que estos conceptos surgieron al final de su desarrollo. Por el contrario sería conveniente apoyarse sobre sus facetas de cálculo numérico (e. g. interpolación) y de cálculo algebraico (e. g. binomio de Newton y desarrollo de $a^n - b^n$). Además, aprovechar ideas que provienen de la geometría o del estudio del movimiento. En este sentido estamos de acuerdo con una idea expresada en el reporte de la Comisión francesa sobre la Enseñanza de la Matemática:

> "*Aun cuando la educación tiene otros recursos, que la reproducción de los meandros de la historia, para dar sentido a los conceptos y a las teorías que se enseñan – eso no se lo podría permitir – es claro que necesitamos conocer cómo sacar las lecciones de estas características epistemológicas y aceptar que el cálculo se pueda desplegar y ayudar a construir un universo matemático, aunque sus objetos no puedan ser todavía definidos perfectamente.*" (Kahane, 2002, p. 201, traducido por los autores).

3. Proyecto experimental de enseñanza del cálculo en México

Para el desarrollo de la experiencia, en esencia son dos propuestas: una permutación en temas del programa de estudio tradicional y el uso de la tecnología.

El advenimiento de software de manipulación simbólica, de procesamiento de datos, de cálculo de raíces, etc. hace de la computadora y/o calculadora una herramienta incuestionable en la enseñanza de las matemáticas. Visualizar un curso de cálculo diferencial sin el uso de la tecnología, sería desaprovechar uno de los recursos más importantes, con los que un profesor puede contar hoy en día. Pero también, pensar que el uso de la tecnología resolvería todos los problemas de enseñanza y aprendizaje, sería algo ingenuo. En este sentido se advierte que el profesor deberá tener cuidado en los procesos matemáticos ocultos y las nuevas representaciones de fórmulas, números y datos producidos por el software (Lagrange, 2005).

> "*El desafío en la educación matemática representado por la introducción de la tecnología es hoy algo incuestionable. Pero la sola introducción de nuevas formas de enseñanza (...) no puede producir el avance deseado, sin un cambio correlativo de ruta de aproximación cognitiva. Desde este punto de vista, consideramos que son esenciales dos realizaciones:*
> - *entender que la computación en el cálculo, es algo diferente de lo visto previamente en algebra, por el juego que se establece entre "local" y "global"*
> - *entender que el uso de la computación, otorga un papel fundamental a la noción de orden de magnitud.*" (Kahane, 2002, p. 241, traducido del francés por los autores)

Nuestra posición entonces radica en utilizar la tecnología bajo un cuidadoso esquema didáctico. En este sentido hemos introducido a un curso de cálculo diferencial esencialmente dos tipos de programas. El primero consiste en escenarios didácticos que simulan un fenómeno natural. Estos escenarios, en donde el estudiante puede manipular los artefactos, se crean en Cabri, Java o Flash, para convertirse posteriormente en applets de uso libre en la red. El segundo tipo consiste de sistemas tutoriales, que comparten con el profesor la tarea docente.

Para la primera parte del curso, que corresponde a los conceptos básicos de función, variable dependiente e independiente, parámetro y ecuación, se diseñó el proyecto de acción concreta (Cuevas & Pluvinage, 2003) llamado "Proyecto poleas".

Este proyecto consiste de tres applets que simulan el movimiento de una polea al cargar un determinado peso. Adicionalmente, delineamos un entorno completo de trabajo para los estudiantes que se compone de:

- Instrucciones dirigidas a los docentes, con la descripción de los objetivos del estudio, la previsión del tiempo necesario e indicaciones de organización.
- Instrucciones de trabajo para los estudiantes.
- Cuestionarios, con los espacios previstos, para conducir la actividad de los estudiantes.
- Archivos interactivos (el laboratorio matemático), con inserción de programas bajo la forma de applets que corren, con el motor Java, en cualquier navegador.

Los cuestionarios sirven, al profesor, para controlar las actividades de sus alumnos; y, a los estudiantes, para orientar, en la dirección correcta, sus experiencias con los archivos interactivos. La figura 2 reproduce la pantalla de un archivo interactivo, elaborado en el marco del estudio del proyecto "Poleas". La actividad conduce, a los estudiantes, a considerar las ideas fundamentales, para el estudio de funciones, que son las de variable independiente, variable dependiente y parámetro, así como los conceptos de dominio y rango de una función.

Es necesario señalar, que un primer curso de cálculo diferencial se diseña para funciones reales. Así, en lo sucesivo, nos referiremos a funciones reales o función real de una variable real.

La propuesta didáctica consiste en iniciar el estudio del cálculo analizando las funciones algebraicas en el siguiente orden: polinómicas, racionales, radicales y por partes, por las siguientes razones:

- Al ser unas de las primeras funciones, que aparecen en la historia, nos permiten un estudio de las funciones acorde al desarrollo histórico del cálculo.
- La sencillez algebraica, de las funciones polinómicas, nos permiten abordar los conceptos propios del cálculo, sin que estos sean sepultados por una complejidad algebraica y numérica.
- Permite abordar de manera gradual, los conceptos del cálculo. En efecto, al analizar en primera instancia los polinomios y después, como una aplicación de los mismos, facilita el análisis de las funciones racionales, radicales y definidas por partes. Por último, sería conveniente abordar las funciones trascendentes, que por cierto, es el orden de aparición histórico.
- Permite abordar el estudio de las funciones en orden ascendente, y el estudio de cada una de ellas, viene a ser una aplicación del estudio anterior. Por ejemplo, el estudio de las funciones racionales surge como una aplicación del estudio de las funciones polinómicas.
- Permiten modelar situaciones reales, con modelos o funciones si tanta complejidad.

Con este antecedente, formaremos los diversos conceptos del cálculo diferencial, a través de la construcción del esbozo gráfico de las siguientes funciones y en el orden señalado. De manera que los conceptos se irán incorporando poco a poco (ver figura 1).

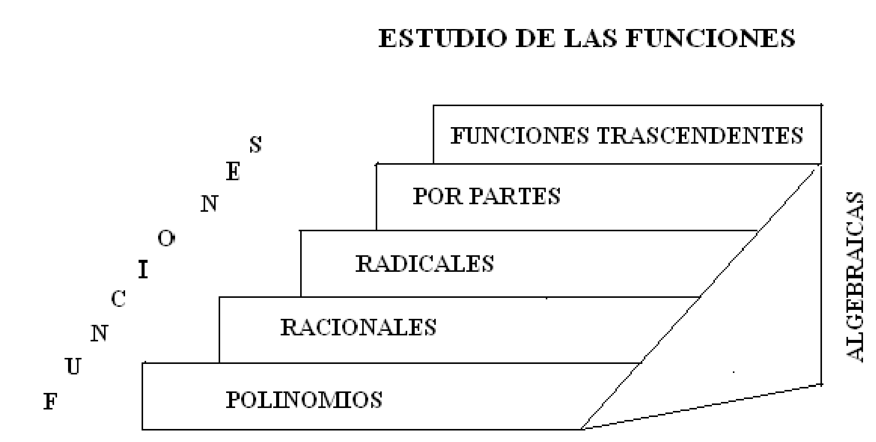


Figura 1. Orden de estudio de las funciones reales, en un primer curso de cálculo diferencial.

Por ejemplo, aunque en el proyecto de acción Poleas se introduce función con dominio y rango, cuando el estudio se extiende a polinomios, el dominio no será un concepto importante a determinar en este caso, puesto que su dominio es el conjunto de todos los números reales, a menos de que se acote previamente. Sin embargo, en las funciones racionales, radicales y las definidas por partes, el dominio será un concepto importante y necesario por determinar.

Los límites en infinito $(x \to \infty)$ se introducen en el estudio de polinomios, y los límites a infinito $\left(\underset{x \to a}{\mathrm{f}(x) \to \infty} \right)$ en las racionales. La continuidad y la diferenciabilidad son conceptos implícitos en polinomios y en funciones racionales; pero no lo son en funciones radicales y las definidas por partes. De esta manera la introducción de los conceptos será gradual y constructiva, conforme el análisis de la función lo requiera. Además, la resolución de las primeras funciones y conceptos facilitará la determinación de los segundos.

El siguiente ejemplo muestra la instrumentación de la tecnología bajo una perspectiva didáctica.

4. Proyecto de acción: Inflar un globo atado al fondo de un recipiente cilíndrico con agua.

Objetivos: Introducir el concepto de función, dominio, variable, ecuación y raíz real.

Supongamos que tenemos un globo inflable asido al fondo de un cilindro de radio $R = 5$ cm. Cuando el globo esta desinflado, es decir, cuando el globo tiene un radio nulo, se echa agua en el cilindro hasta que alcance una altura h_0. Ahora bien, el experimento consiste en observar lo que ocurre cuando se infla el globo (ver figura 2). Más precisamente, se trata de determinar un valor del nivel alcanzado por el agua, que llamaremos h, cuando este sea igual al diámetro del globo, es decir cuando el globo alcance exactamente la superficie del agua.

El problema que se plantea es encontrar el radio del globo cuando éste es tangente a la superficie del líquido. Para observar la variación y los posibles casos de solución, se proporciona al estudiante un applet, en donde el estudiante podrá regular la cantidad de agua inicial para después ir inflando el globo. Mediante la actividad guiada de un cuestionario, el estudiante y profesor plantean la ecuación que resulta ser un polinomio cúbico y para resolverlo se utiliza el sistema tutorial CalcVisual.

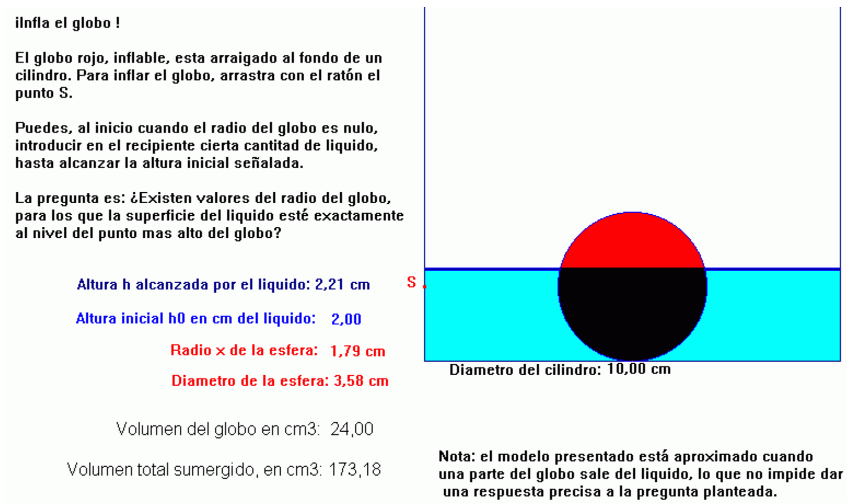


Figura 2. Simulación de un globo sumergido en agua en un recipiente cilíndrico.

Presentación matemática del problema

El volumen V_{se} de una sección de esfera de radio x, entre el nivel 0 y la altura h, corresponde a una fórmula de geometría elemental y es

$$V_{se} = \pi\left(h^2 x - \frac{h^3}{3}\right)$$

De esta fórmula, se deduce que cuando $h = 2x$, el volumen total de una esfera de radio x estará dado por

$$V_e = \frac{4}{3}\pi x^3$$

Tomemos ahora un recipiente cilíndrico con una base circular de radio R. Sea h la altura alcanzada por el líquido en este cilindro de radio R, cuando el globo es tangente a la superficie del líquido.

Note que, para el globo sumergido, h es superior o igual al diámetro $2x$ de la esfera (véanse figuras 3 y 4).

Pero en cualquier caso, si la esfera está completamente sumergida, el volumen total del líquido en el recipiente incluye el volumen del globo, y está dado por el volumen del globo, $4\pi x^3/3$, más el volumen del liquido que es $\pi R^2 h_0$. Así tenemos que

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$\frac{4}{3}\pi x^3 - \pi R^2 h + \pi R^2 h_0 = 0$$

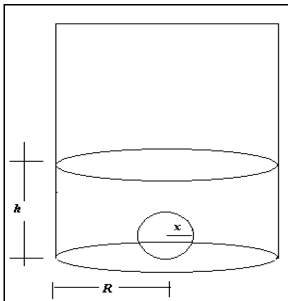


Figura 3. Globo de radio *x* sumergido en un recipiente cilíndrico

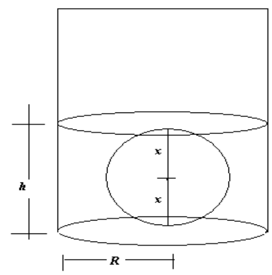


Figura 4. Globo de radio *x* tangente a la superficie del agua en el recipiente cilíndrico.

Cuando el globo es tangente a la superficie del líquido, se cumple que: $h = 2x$, luego entonces, la ecuación se transforma en:

$$\frac{4}{3}\pi x^3 - 2\pi R^2 x + \pi R^2 h_0 = 0$$

O bien

$$\frac{4}{3}x^3 - 2R^2 x + R^2 h_0 = 0$$

Si denominamos a: $a_3 = \frac{4}{3}$; $a_2 = 0$; $a_1 = -2R^2$ y $a_0 = R^2 h_0$, tenemos que la ecuación queda:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Es una **ecuación de tercer grado.**

Si ahora tomamos el primer miembro de la ecuación, como función de *x*, resulta:

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Es un **polinomio de tercer grado.**

Al resolver la ecuación, en nuestro caso concreto, se tiene que:

$h_0 = 4$ **y** $R = 5$ **entonces:** $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -50$ y $a_0 = 100$.

Así

$$P(x) = \frac{4}{3}x^3 - 50x + 100 \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 5$$

Pero ¿cómo se comporta un polinomio de tercer grado? y ¿cuál es su gráfica?

Analicemos la gráfica de *P*(*x*) en general y después acotemos al arco de curva que define la función y su dominio.

Como es conocido, proporcionar la gráfica completa para funciones definidas en todos los reales, es tarea imposible. Por ello, lo que se proporciona es un esbozo gráfico, intentando plasmar, en este esbozo, las propiedades más importantes de la función. Y esto nos lleva a preguntarnos ¿Cuáles son los puntos más importantes que deberá contener un esbozo gráfico? Estos puntos son los que se visualizan en la figura 5, y aunque aparentemente son muchos, lo más importante es que la determinación y método de construcción de los primeros, nos conducirán y facilitarán la determinación de los que siguen. Al unir todos estos puntos obtendremos el esbozo gráfico deseado.

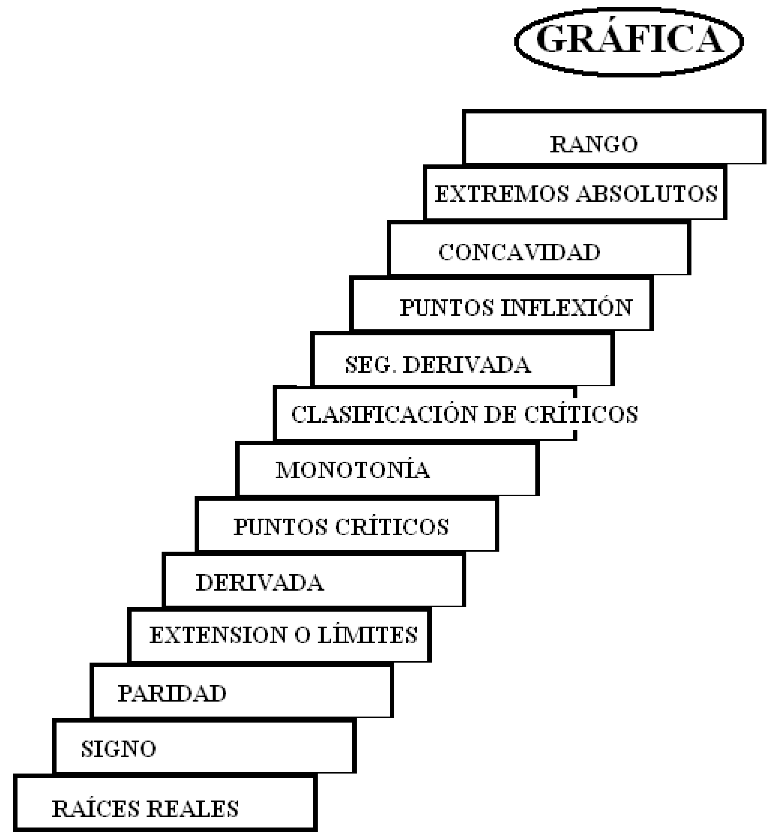


Figura 5. Conceptos a resolver, para la construcción de la gráfica de una función polinómica.

Para determinar las raíces del polinomio $P(x)=\frac{4}{3}x^3-50x+100$, utilizaremos el sistema tutorial CalcVisual. Este sistema propone, como proyecto de acción, la construcción de la gráfica de este polinomio, determinando cada una de las características de la figura 5.

En este caso, para obtener las raíces reales, se da entrada al polinomio y se opta por *Construir la Gráfica* y en el menú que aparece, se elige *Raíces reales*. Luego se proporciona el número máximo de raíces reales, con lo obtenemos la pantalla que se muestra en figura 6). En *Herramienta* optamos por *Evaluación por rango* y se proporciona un *Valor Inicial* de -10 y se da el valor de 1 al *Incremento*. Obtenemos la evaluación del polinomio en un rango de 20 valores, a partir del valor inicial, con el incremento dado.

Esta herramienta permite, mediante aproximación, encontrar el valor de la raíz solicitada o todas una a una.

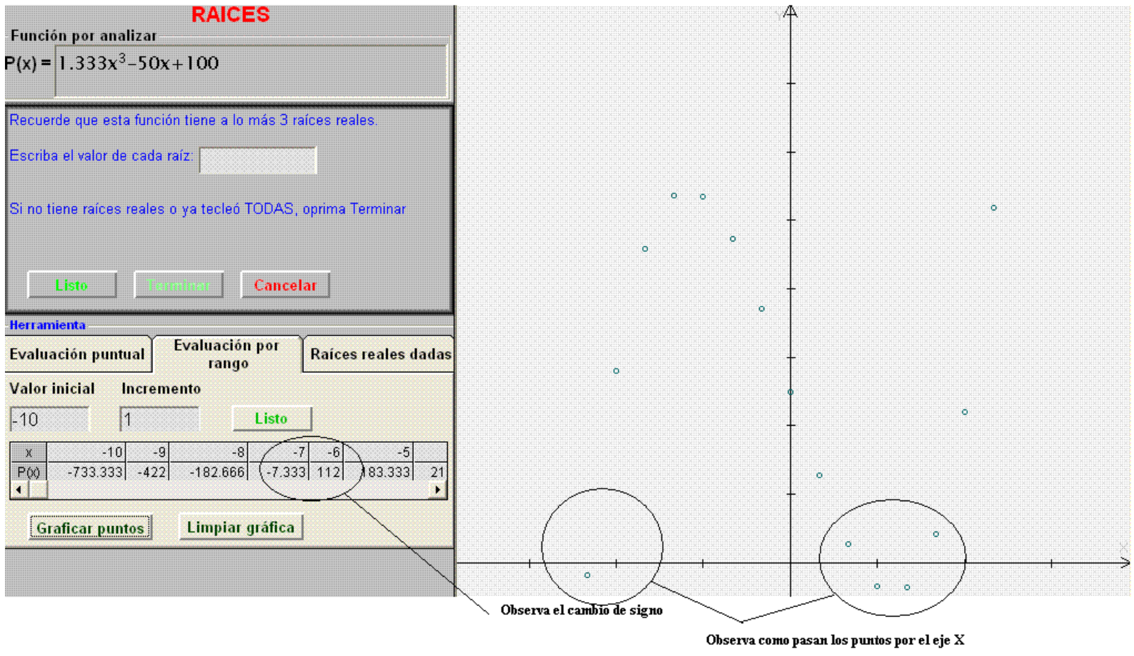
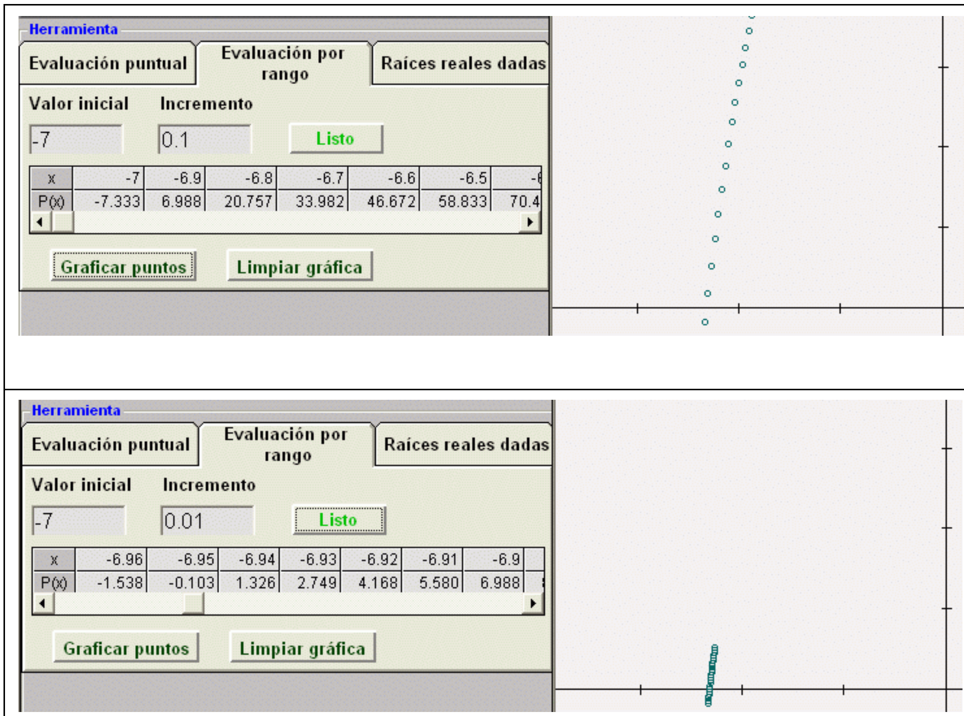
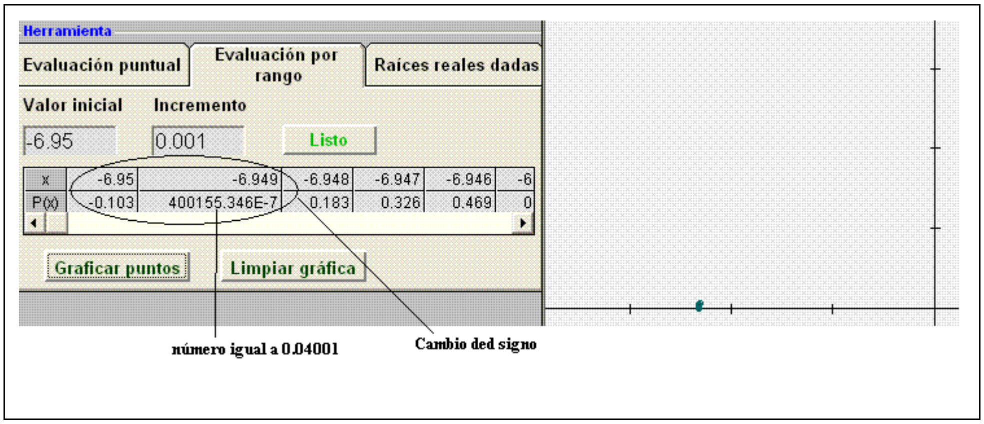


Figura 6. Interfaz de raíces del sistema tutorial CalcVisual.

Mediante la evaluación por rango nos podemos ir aproximando al valor de la raíz hasta encontrar la primera de ellas





De esta manera proponemos $x_1 = -6.949$ como aproximación a la primera raíz, valor que valida CalcVisual. De igual forma se obtiene que las demás raíces reales son: $x_2 = 2.343$, $x_3 = 4.606$. Una vez encontradas las raíces reales, se regresa al problema original y se elige, aquella que se encuentra dentro del dominio de la función.

Note que, en esta breve descripción, se trabaja con los diversos registros de representación semiótica, al resolver el problema.

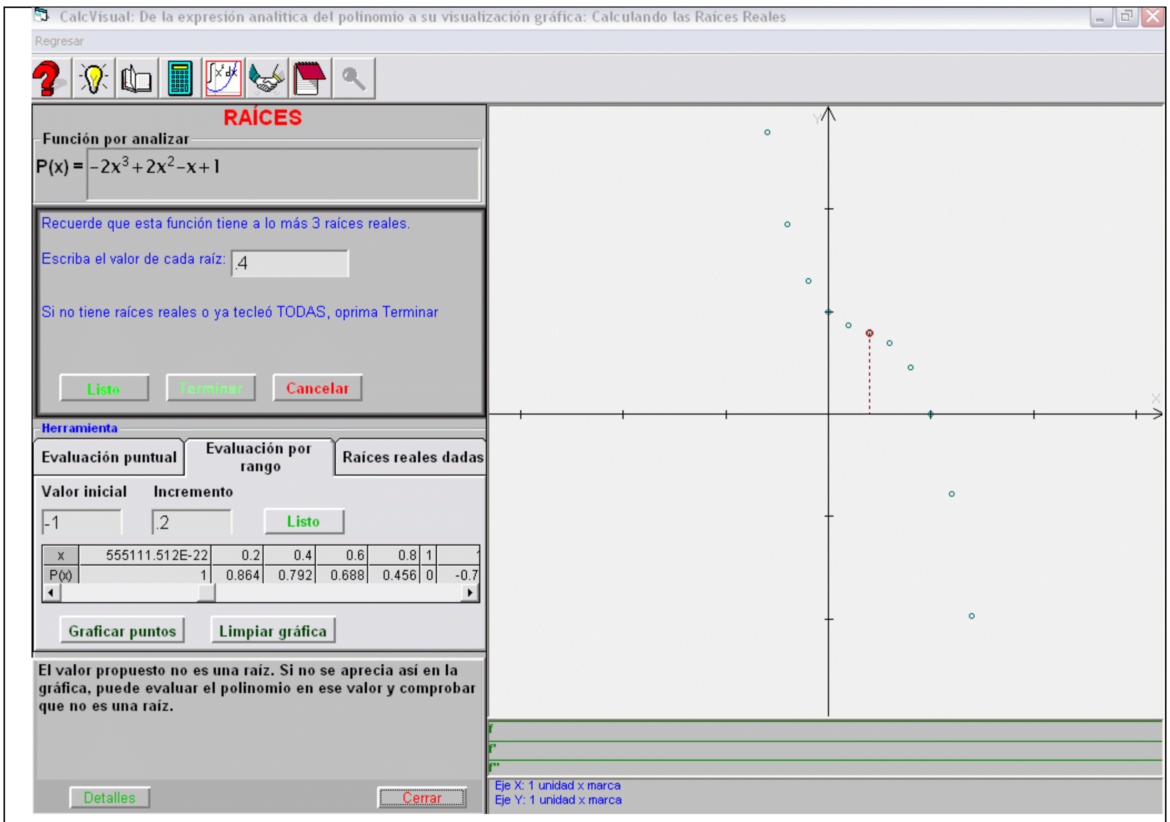


Figura 7. Interfaz de CalcVisual, note que el menú principal se ha modificado

Una vez adquirido el concepto de raíz real en polinomios, el concepto que seguiría sería el Signo de dicha función. Ahora bien, determinar el signo en un polinomio, resulta una tarea sencilla. En efecto, si conocemos todas sus raíces reales, como la función es continua en su dominio, basta dividir el dominio en intervalos dados por las raíces y evaluar a dicha función para obtener de inmediato su signo. Por ejemplo, para el polinomio $P(x)=\frac{4}{3}x^3-50x+100$ conocemos que sus raíces reales son: $x_1=-6.949$, $x_2=2.343$ y $x_3=4.606$. Con ellas se determinan los intervalos: $(-\infty,-6.949)$; $(-6.949,2.343)$; $(2.343,4.606)$ y $(4.606,+\infty)$. Evaluando la función, con CalcVisual, en un punto intermedio de cada intervalo, determinamos que: $P(x)<0$ en $(-\infty,-6949)\cup(2.343,4.606)$ y $P(x)>0$ en $(-6949,2.343)\cup(4.606,+\infty)$.

Después de interiorizar ambos conceptos, se podrían plantear problemas como:

Determinar dominio, raíces y signo de la función:

$$R(x)=\frac{x^2+x+6}{2x^3-9x^2-2x+24}$$

En una función racional, el primer problema es definir el dominio. Pero se sabe que el dominio será: $D_R=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2x^3-9x^2-2x+24\neq 0\right\}$. Es decir, el cálculo del dominio de una función racional, se reduce a un problema de aplicación de las raíces reales de un polinomio.

De igual forma, para estudiar una función radical del tipo $S(x)=\sqrt{2x^3-9x^2-2x+24}$, el primer problema es determinar el dominio de la función. Pero de nuevo, el dominio de esta función estará determinado por $D_s=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2x^3-9x^2-2x+24\geq 0\right\}$. Es decir, para determinar el dominio, de una función radical, se requiere el signo del polinomio.

Esta es la idea que deseamos comunicar: introducir los conceptos conforme a las necesidades de análisis de las funciones encontradas e introducir los casos generales de manera gradual y constructiva.

5. Conclusiones

La Dra. Magally Martínez R. (Martínez, 2009) reporta que en 2003 implementó, por primera vez, el sistema CalcVisual en el curso de cálculo I, en un grupo de la carrera de Informática Administrativa (LIA) del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco. El mismo curso se impartió para otro grupo, de manera tradicional, con otro profesor, en la carrera de Ingeniería en Computación (ICO) de la misma Universidad. La investigación tenía el propósito de detectar el desempeño escolar entre ambos grupos. De la experiencia se tuvieron los siguientes resultados: los índices de reprobación en el grupo de ICO fueron del 80%, mientras que el grupo de LIA fue del 25%. La Dra. Martínez agrega que, ante la contundencia de los resultados que se dieron, sin modificar los sistemas de evaluación, en el siguiente año, 2004, impartió la materia de cálculo I, en ambos grupos, logrando disminuir los índices en ICO a 7.3% y en LIA a 9.8%. Continuando la experiencia, en la generación 2005 obtuvo 21.9% para ICO y 15% en la carrera de LIA. En la generación 2006, el índice de reprobados fue de 2.6% en ICO y de 7.7% en LIA (Martínez, 2009, pp. 51-55). Detalla la Dra. Martínez, que el uso de las herramientas proporcionadas por CalcVisual, facilita la actividad de factorización algebraica, mediante las herramientas que el software presenta, sin que esta sea su finalidad. En particular, se observa esta mejoría en el conocido problema para factorizar polinomios, que se observa en los alumnos como rezago de su deficiencia en el manejo algebraico. El desarrollar actividades en cada registro de representación semiótica (algebraico, tabular y gráfico), para el concepto raíces reales de una función y su representación como producto de binomios, permite al alumno superar ciertos obstáculos algebraicos.

En cuanto a la opinión de los de alumnos de LIA, ellos consideran un buen apoyo el software, pero les resulta difícil navegar y entender el significado del concepto. Constantemente solicitan ejercicios al profesor, a pesar de que el sistema proporciona ejercicios aleatorios. También consideran que esta forma de enseñanza contrasta con la manera en que tradicionalmente se desarrollan los cursos de matemáticas.

Dado que el ingreso es anual, en la siguiente generación que inició en 2008, la experiencia con CalcvVisual, se implementó en todos los grupos de cálculo de la Universidad. Se planteó exactamente el mismo esquema de trabajo, dos horas en la sala de computo con CalcVisual y dos horas en el salón de clase, se tuvo más cuidado en la aplicación de los *pretest* y *postest* para comparar resultados, y se trató de trabajar más sesiones como guía para el uso de CalcVisual. La Universidad continúa la aplicación de nuestras propuestas y ha ido disminuyendo sustancialmente su alto índice de reprobación, sin modificar el sistema de evaluación tradicional.

6. Perspectivas

El test diagnóstico no pretende cubrir todos prerrequisitos sino localizar a cada estudiante en una escala de competencias importantes que suponen el manejo de sintaxis específicas, solicitadas de manera constante en el cálculo diferencial: cálculo numérico, uso de la proporcionalidad, manejo de escrituras algebraicas.

Los proyectos de acción, se apoyan en escenarios didácticos creados por programas que se ejecutan en cualquier computadora, mediante applets o ActiveX. Cada proyecto tiene como objetivo la introducción de definiciones y/o conceptos.

Desde el punto de vista matemático, la derivada de una función algebraica se define globalmente al poner el incremento de la variable como factor de su variación:

$$f(x+h)-f(x)=Q(x,h)h \text{ o } f(x+h)-f(x)=f'(x)h+R(x,h)h^2 .$$

La hipótesis pedagógica es posponer la introducción del estudio de límite y de derivación de una función en un punto, hasta cuando los estudiantes han adquirido experiencia sobre los fenómenos encontrados con polinomios y funciones algebraicas.

En los ejercicios se usan de manera sistematizada los cambios de registros.

Este modelo se pretende extenderlo a nivel nacional, en varias instituciones educativas a nivel superior.

- Hoy estamos en una fase de experimento a mayor escala, con el apoyo de un seminario nacional que usa contactos a distancia por videoconferencias e intercambios a través de un sitio web. Se organizó en noviembre de 2008 en el CINVESTAV de la Ciudad de México el Segundo Encuentro Internacional Sobre la Enseñanza del Cálculo.
- En noviembre 12 y 13 de 2009 se llevará a cabo el Tercer Encuentro de Cálculo en la ciudad de Saltillo (Coahuila).

- Se continúa la experimentación en el CUVCHUAEM y se están perfeccionando los instrumentos de medición y cuestionarios; estamos tratando de exportar el modelo Chalco a otras instituciones para tener una muestra más confiable.
- Los autores de CalcVisual, Cuevas & Mejía (2003), están elaborando la versión de CalcVisual II.

Bibliografía

Anderson, John R. (1988). The Expert Module. *Foundations of Intelligent Tutoring Systems.* Edited by Martha C. Polson and J. Jeffrey Richarson. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, NJ, p. 21

Andreu M. E. & RIESTRA J. A. Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Volume 12, 2007, IREM de Strasbourg, France. p. 165 - 187

ANUIES, (2002), *Reportes de calidad de las Instituciones de Educación Superior en México*. En: http://www.ANUIES.mx.

Baker B., Hemenway, C. & Trigueros, M. (2001). On transformation of functions. *Proc. 23th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utah, PME, p. 18-21.

Bloch, Isabelle. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 52, p. 3–28). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Carpenter, T.P. & Hebert, J. (1996). Learning and Teaching with Understanding. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Cuevas, A., (1996). Sistemas Tutoriales Inteligentes. *Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cuevas A. & Mejía H. (2003). *Cálculo Visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, C. and Pluvinage, F. (2003). Les projets d`action pratique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives* (Vol. 8., p. 273-293). IREM de Strasbourg, France.

Cuevas, A., Moreno, S. & Pluvinage F. (2005). Una Experiencia De Enseñanza Del Objeto Función. *Annales de didactique et sciences cognitives* (Vol. 10, p. 177 – 208). IREM de Strasbourg, France.

Cornu B. (2002). Limits in D. Tall (eds). *Advanced Mathematical Thinking* Mathematics Education Library. Vol. 11, Chap. 10. p. 153-166. Springer, Netherlands. DOI 10.1007/0-306-47203-1.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*. Vol. 56. Washington, DC. p. 195-206.

Habre Samer & Abboud May. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior.* Vol. 25. Elsevier, Amsterdam, Netherlands. p. 57–72.

Kahane, J-P. (ed.). (2002). *L'enseignement des Sciences Mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, CNDP, Odile Jacob, Paris. At: http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf. Last modified June 2003.

Keskessa, B. (1994). Preuves et plans de signification: une hypothèse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14/3. La Pensée Sauvage, Grenoble, France. P. 371–376.

Lagrange, J.B. (2005). Transposing Computer Tools from the Mathematical Sciences into Teaching, Some possible obstacles, in: Guin D., Ruthven K. & Trouche L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, Chap. 5, Springer Netherlands, p. 67-82.

Martínez M. (2006). Desarrollo de un entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza del cálculo diferencial. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Martínez M. (2009). *Memorias del Primer Encuentro Nacional de Cálculo*. Comp. A. Cuevas, F. Pluvinage, S. Martínez y M. Cornejo. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Orton, A. 1983a. "Students` Understanding of Differentiation". *Educational Studies in Mathematics*. 14/3. Springer, Netherlands. p. 235-250.

Purdue Calculus Reform Project: *Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning* (C4L) under the direction of Ed Dubinsky and Keith Schwingendorf. At http://www.pnc.edu/Faculty/kschwing/C4L.html. Last modified May 2004

Rodrigues, Manuel; Paulo Novais and Manuel Felipe Santos. (2005). Future Challenges in Intelligent Tutoring Systems – a Framework, *Proceedings of IV Conference on Multimedia and Information and Communication Technology in Education, m-ICTE 2005*, Sevilla, Spain. At: www.formatex.org/micte2006/. Last modified November 2006.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* 77. Derby, U.K., p. 20-26.

Steen, L. A. (1987). *Calculus for a new century: A pump, not a filter*. Mathematical Association of America, MAA Notes, 8.

Sierpinska, A. (1996). *Understanding in Mathematics*. Routledge Publishing, Taylor & Francis, London, UK. 248 pages

Tall, D. (1996). Functions and Calculus, *International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Tall, D. & Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. Vol.12, N° 2. Springer, Netherlands. p 151-169

Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First-year Undergraduates´ Difficulties in Working with Different Uses of Variable. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & F. Hitt (Eds.), *Conference Board of the Mathematical Sciences Issues in Mathematics Education, Research in Collegiate Mathematics Education. V*. Vol. 12, Providence, RI: American MathematicalSociety. p. 1-29.

Carlos Armando CUEVAS VALLEJO
ccuevas@cinvestav.mx

François PLUVINAGE
pluvin@math.u-strasbg.fr