Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada

Angélica María Aguilar & Jesús Alfonso Riestra
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN
México

Resumen. En la tesis de maestría de Aguilar (2007) se desarrolla y experimenta una propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de la derivada (y de la diferencial) que se inscribe dentro de lo que se ha dado en llamar la *derivada algebraica*, tomada prestada de la historia del desarrollo de la derivada por Riestra (2001) y convertida en una propuesta educativa. La propuesta, de forma congruente con el desarrollo histórico de la derivada (Grabiner, 1983), no recurre previamente, al introducir la derivada, al tradicional límite del cociente diferencial (ya sea de la manera intuitiva o de la rigurosa ε-δ). En su lugar, al abordar problemas de máximos y mínimos, se desarrollan diferencias de la función en términos de incrementos finitos de la variable independiente y se comparan potencias de diferentes órdenes de dichos incrementos, despreciando las de orden superior con respecto a las de orden inferior, cuando se toman incrementos "realmente" muy pequeños. La derivada aparece de manera natural en estos desarrollos como el *coeficiente diferencial*. Los problemas de máximos y mínimos adecuadamente seleccionados y ordenados permiten desarrollar gradualmente la teoría matemática involucrada en el concepto de derivada sin recurrir al concepto de límite. Otro cambio importante con respecto a la enseñanza tradicional, es el manejo de signos, en lugar de desigualdades, en la caracterización de máximos y mínimos de una función.

1. Introducción: El Método de Fermat

La propuesta en la tesis de Aguilar (2007) para introducir el concepto de derivada en el contexto de máximos y mínimos desarrolla (y experimenta) una idea de Riestra (2001), por lo que será referida como la propuesta Aguilar-Riestra. Dicha propuesta constituye una *variante* de la correspondiente introducción de la derivada en la tesis doctoral de Andreu (2006), así como de los artículos complementarios de la misma autora con su director (Andreu y Riestra, 2005 y 2007), por lo que esta última será referida como la propuesta Andreu-Riestra.

La *función derivada* aparece por primera vez de manera implícita en los problemas isoperimétricos de máximos y mínimos de Fermat. Dichos problemas se modelan con funciones algebraicas. Consistentemente, la derivada algebraica, en ambas propuestas, surge en el contexto de máximos y mínimos en situaciones similares a las del método de Fermat. De hecho, en la de Andreu-Riestra, se plantea una versión moderna de dicho método para la determinación de valores extremos de funciones algebraicas. Ahí el método de Fermat se justifica apelando a que la ecuación $f(x+h)-f(x)=0$ tiene a $h=0$ como raíz doble cuando en x hay un extremo, i.e. $f(x)$ es máximo o mínimo; véase Riestra (2001) para una justificación rigurosa en el caso de polinomios. Una solución obvia de $f(x+h)-f(x)=0$ es $h=0$ sin importar el valor de *x*. Por el teorema del factor se tiene entonces $f(x+h)-f(x)=Q_x(h)\cdot h$ y se requiere que $h=0$ sea también una raíz del factor $Q_x(h)$, i.e. $Q_x(0)=0$, lo que nos da una condición sobre x para que $h=0$ sea raíz doble. Sin embargo, el que se deba tener una raíz doble se *deduce* a partir de una figura geométrica (Andreu y Riestra, 2005) y tal deducción tiene sutilezas de consideración (ver Aguilar, 2007, p.12).

Resolvamos un ejemplo de acuerdo con la versión moderna del método de Fermat (Andreu y Riestra, 2005) ya bajo el supuesto de la raíz doble.

Ejemplo de Fermat: Dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo.

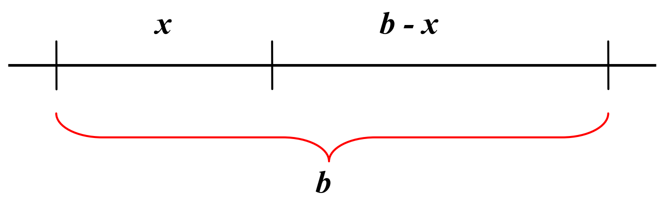


Figura 1

Sea b la longitud del segmento y x la primera parte del mismo (ver Fig. 1). Entonces la segunda parte será $b-x$ y el producto de las dos partes: $f(x)=x(b-x)=bx-x^2$. Debemos determinar el valor de x que haga máximo a $f(x)$. Ilustramos con la versión moderna del Método de Fermat:

1. Desarrollamos $f(x+h)-f(x)$, eliminando los términos comunes y factorizando a h

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \left[b(x+h)-(x+h)^2\right]-\left[(bx-x^2)\right] \\ &= \cancel{bx}+bh-\cancel{x^2}-2xh-h^2-\cancel{bx}+\cancel{x^2} \\ &= bh-2xh-h^2 \\ &= (b-2x-h)h \end{aligned}$$

2. Identificamos el cociente como la expresión $Q_x(h)=b-2x-h$.

3. Calculamos $Q_x(0)$ y lo igualamos a cero: $Q_x(0)=b-2x=0$ (condición sobre x para que la diferencia $f(x+h)-f(x)$, que es igual a $Q_x(h)\cdot h$ tenga a $h=0$ como raíz doble).

4. Resolvemos la ecuación $Q_x(0)=0$, i.e. $b-2x=0$, que nos da $x=\dfrac{b}{2}$ y que resulta ser el extremo buscado. Por lo tanto, la solución al problema del producto máximo, es dividir el segmento en dos partes iguales.

[Note que la naturaleza del extremo tiene que ser deducida de condiciones particulares, o, en todo caso, externas al método mismo: un extremo implica una raíz doble, pero no necesariamente se cumple el recíproco y menos aún la determinación de cuál de los dos, máximo o mínimo]

2. Generalizando el Método de Fermat

En la propuesta Aguilar-Riestra (que constituye una variante de la Andreu-Riestra) se ofrece un método alternativo, puramente algebraico, para la determinación de máximos y mínimos que se basa simplemente en el signo de la función diferencia. Concretamente, al plantear problemas de máximos y mínimos, se observa que una condición (necesaria y suficiente) para que la función alcance un valor extremo en el punto x del dominio de la función, es justamente que el signo de la diferencia $f(x+h)-f(x)$ no cambie mientras h recorre valores *permisibles* (i.e. que $x+h$ se mantenga en el dominio de f). Un mismo signo *positivo* nos habla de un *mínimo* mientras que un mismo signo *negativo* de un *máximo* (y, desde luego, un cambio de signo de que no hay extremo en x). Resolvamos el clásico ejemplo de Fermat, que enunciamos antes, con el nuevo método.

Ejemplo de Fermat: [Tómese el planteamiento del método anterior]

La función a maximizar es: $f(x)=x(b-x)=bx-x^2$ donde x pertenece al intervalo [0, b] (dominio)

1. Se calcula la diferencia $f(x+h)-f(x)$ y se desarrolla en potencias del incremento h

$$f(x+h)-f(x)=bh-2xh-h^2=(b-2x)h-h^2$$
$$f(x+h)-f(x)=(b-2x)h-h^2$$

Debe cumplirse que $(x+h)\in[0,b]$ o sea $0\le(x+h)\le b$. De donde los valores permisibles de h deben satisfacer las desigualdades $-x\le h\le(b-x)$.

2. Se verifica el carácter de los puntos extremos del intervalo dominio, a saber $x=0$ y $x=b$. Sustituyendo $x=0$ obtenemos $f(0+h)-f(0)=bh-h^2=(b-h)h$ con $0\le h\le b$. De los valores permisibles de h tenemos que $h\ge 0$ y $(b-h)\ge 0$ lo que hace que el signo de la diferencia sea siempre mayor o igual que cero o estrictamente mayor que cero quitando los extremos mismos. Luego, la diferencia no cambia de signo y se trata de un mínimo. Procediendo de manera análoga en $x=b$ también se ve que ahí f alcanza un valor mínimo, i.e. la función alcanza un mínimo en $x=0$ y $x=b$. Como buscamos un máximo continuaremos analizando la diferencia para puntos interiores del intervalo (i.e., $0<x<b$).

3. Se examina el signo de la diferencia $f(x+h)-f(x)=(b-2x)h-h^2$, cuando x es un punto interior del intervalo dominio ($0<x<b$) y para valores permisibles de h, esto es, $-x\le h\le(b-x)$, como antes determinamos.

Como $0<x<b$, se tienen $-x<0$ y $(b-x)>0$, por lo que h admite valores permisibles tanto positivos como negativos.

¿Qué necesitamos para que el signo de la diferencia $f(x+h)-f(x)=(b-2x)h-h^2$ no cambie? Podemos afirmar que para valores de h "suficientemente" pequeños, pero diferentes a cero, sus *potencias de orden superior* (i.e. h^2, h^3, etc.) son *despreciables* con respecto al valor de h. El efecto de esto lo analizamos a continuación.

Cuando $(b-2x)\neq 0$ el signo del producto $(b-2x)h$ dominará sobre el signo de $-h^2$ para h suficientemente pequeña y diferente de cero. En tal caso el signo de $(b-2x)h$ cambiará con el signo de h (recuerde que h puede ser tanto positivo como negativo).

Así pues, para valores de h (distintos de cero) permisibles y "suficientemente" pequeños si $(b-2x)\neq 0$, la diferencia $f(x+h)-f(x)$ cambiará de signo con h y la función no tendrá un valor extremo en el argumento x. Entonces, una *condición necesaria* para que la diferencia

$f(x+h)-f(x)$ *no cambie de signo* es que el coeficiente de *h*, en este caso $(b-2x)$, sea igual a cero. El coeficiente de *h* es llamado el *coeficiente diferencial y* la situación es típica: *una condición necesaria para que una función alcance un valor extremo en un* <u>*punto interior*</u> *x es que el coeficiente diferencial* (una expresión que depende de *x*) *se anule*.

4. Se resuelve la ecuación (en *x*) *coeficiente diferencial* = 0, en este caso $(b-2x)=0$.

Al resolver, obtenemos $x=\frac{b}{2}$ como el único candidato para que la función alcance un máximo o un mínimo (valor extremo).

5. Se sustituye el valor encontrado $x=\frac{b}{2}$ en la diferencia $(f(\frac{b}{2}+h)-f(\frac{b}{2}))$ y se analiza su signo:

$$f(\frac{b}{2}+h)-f(\frac{b}{2})=(\cancel{b-2\frac{b}{2}})h-h^2=-h^2<0$$

La diferencia centrada en $x=\frac{b}{2}$ es igual a $-h^2$ que es negativa siempre para cualquier $h\neq 0$, en particular para los valores permisibles de *h*.

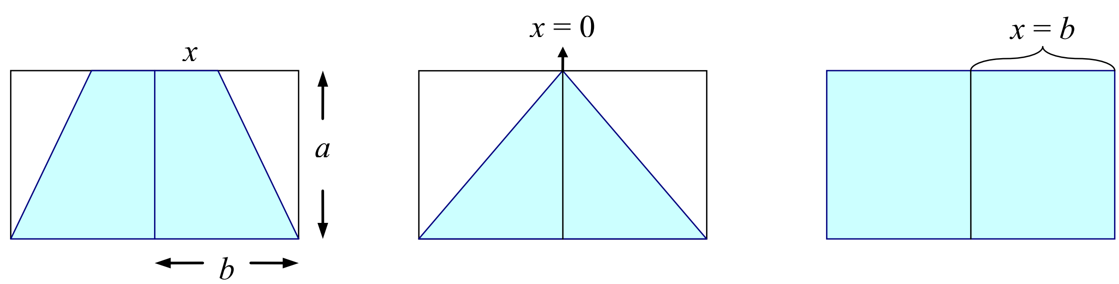
Por lo tanto hemos probado que la función f alcanza un *máximo* (absoluto) en $x=\frac{b}{2}$.

Obsérvese que a diferencia de su predecesor, el nuevo método para máximos y mínimos funciona en los extremos del intervalo dominio y no sólo en puntos interiores del mismo y que puede dar condiciones suficientes para extremos, como acabamos de ver.

3. La variante

En la propuesta Aguilar-Riestra, mediante la resolución de problemas de máximos y mínimos, gradualmente se va construyendo, como una necesidad, la teoría matemática involucrada hasta que surge en forma natural, dentro de un contexto físico, el concepto de derivada.

De hecho, se empieza con un primer ejemplo que es tan sencillo que es posible resolverlo sin la ayuda del álgebra: se considera un rectángulo de base 2*b* y altura *a*, en el cual se inscribe un trapecio isósceles, cuya base mayor coincide con la del rectángulo y la longitud de su base menor varía (ver fig.2a). Se pide determinar los valores mínimo y máximo del área del trapecio.



(a) (b) (c)

Figura 2

Como puede verse, en este ejemplo es muy fácil establecer el máximo y el mínimo a simple vista (más fácil aún, con la ayuda de una figura dinámica). Su propósito es que permite introducir de manera intuitiva el álgebra y las ideas sobre las que descansa el método, al atacar un problema cuya solución es conocida.

Se empieza construyendo la función $f(x)=a(b+x)$ con $0\le x\le b$ que nos da el área de cualquier trapecio inscrito. Ya sabemos por simple inspección que tal función alcanza su valor mínimo en $x=0$ (fig. 1b: triángulo) y su valor máximo en $x=b$ (fig. 1c: rectángulo), es decir, en los extremos del intervalo dominio.

Sin embargo, para comprobar algebraicamente que $f(0)$ es efectivamente el valor más pequeño que puede alcanzar la función f, analizamos el incremento de los valores de la función correspondientes a incrementos del valor $x=0$, denotados por $(0+h)$, donde h es el incremento. Debemos garantizar que el argumento $(0+h)$ pertenezca al dominio de la función, esta condición determina lo que llamamos los valores permisibles de *h*. En este caso, $0\le h\le b$ luego h es positiva o cero. Después calculamos la diferencia que está dada en general por $f(x+h)-f(x)=a$, luego para $x=0$ (y $h\neq 0$) tenemos que el signo de la diferencia se mantiene positivo, corroborando algebraicamente que se trata de un *mínimo*.

De manera análoga, verifiquemos algebraicamente que en $x=b$ la función alcanza un máximo. En efecto, para $x=b$ los valores de h permisibles son negativos o cero ($-b\le h\le 0$) y por lo tanto el signo de la diferencia (con $h\neq 0$) también es negativo caracterizando un *máximo*.

En resumen, este ejemplo cuya solución era ya conocida, permite introducir terminología y notación convenientes: incrementos signados, h permisibles, etc. Además, se desarrolla por primera vez la diferencia $f(x+h)-f(x)$ en potencias de h y por supuesto, la caracterización de máximos y mínimos en términos de signos.

Después de resolver, utilizando el método, una serie de ejemplos (el de Fermat incluido) que se van complicando gradualmente y al estar ya familiarizados con el desarrollo de la diferencia $f(x+h)-f(x)$ en potencias de *h*, es decir, con $f(x+h)-f(x)=E_0(x)\cdot h+E_1(x)\cdot h^2+.\ ,\ .$ averiguamos quién es el coeficiente de *h* (coeficiente diferencial) que desde luego, no es otro que la *función derivada*. Con la intención de darle a la derivada un significado más interesante, en el desarrollo de un problema físico, *el lanzamiento hacia arriba de un balín u objeto pesado en la Luna* (suponiéndole una aceleración gravitatoria ligeramente mayor). En este contexto interpretamos al coeficiente diferencial como una razón de cambio límite: *la velocidad instantánea*.

El ejemplo físico en la propuesta Aguilar-Riestra es crucial. Ahí surge la derivada (algebraica) interpretada como la velocidad instantánea que nos da la intensidad y el sentido del movimiento en cada instante, lo que permite determinar los intervalos de monotonía de la función. Si tal derivada es positiva, el movimiento se realiza hacia arriba, es decir la función crece. Mientras, que si es negativa el movimiento ocurre hacia abajo, lo que equivale a decir que la función decrece. Esto permitirá, posteriormente, al interpretar a cualquier función como un movimiento, determinar con el signo de su derivada (entendida como velocidad instantánea), sus intervalos de monotonía.

Ejemplo Físico: Un móvil se desplaza en el eje Y y su posición está dada en cada instante *t,* por la siguiente ley (función) $y(t) = -t^2 + 2t$, con $t \geq 0$, i.e. $t \in [0, \infty)$ (*y* en metros y *t* en segundos). Se desea hacer una descripción, lo mejor posible, de dicho movimiento.

Utilizaremos nuestro método denotando al incremento con Δt en vez de *h*.

1°. Desarrollamos la diferencia: $y(t + \Delta t) - y(t) = (-2t + 2)\Delta t - \Delta t^2 \quad ...(1)$

2°. Analizamos el comportamiento en el extremo inicial del intervalo dominio (no hay extremo final). El instante inicial $t = 0$, además de que es el punto extremo del dominio, tiene interés especial en la descripción del movimiento

$y(0) = 0$

$y(0 + \Delta t) - y(0) = 2\Delta t - \Delta t^2 = (2 - \Delta t)\Delta t \ ...(2)$

donde $y(0)$ representa la posición inicial que resulta ser el origen del eje Y. Los valores permisibles de Δt, en este caso, satisfacen $\Delta t \geq 0$. Además para valores de Δt "suficientemente" pequeños, el signo de la diferencia está dado por el signo del término dominante $2\Delta t$ que resulta ser positivo. De tal manera que la función alcanza un *mínimo* en $t = 0$, por lo que podemos suponer, razonablemente, que el móvil partiendo del origen, se desplaza hacia arriba, al menos inicialmente.

3°. Analizamos el comportamiento en un punto *t* interior (*t* >0). Ahora bien, con referencia a la ecuación (1) ya sabemos que una condición para poder tener valores extremos en un punto interior es que se anule el coeficiente diferencial, esto es, que el punto interior *t* cumpla $-2t + 2 = 0$. Al resolverla obtenemos $t = 1$ como *el único punto interior <u>candidato</u> a valor extremo*.

Analizamos la diferencia $y(1 + \Delta t) - y(1) = -(\Delta t)^2$, donde los valores Δt permisibles pueden ser tanto negativos como positivos (como corresponde a un punto interior). Para cualquier valor Δt permisible (excepto $\Delta t = 0$), el signo de la diferencia $y(1 + \Delta t) - y(1)$ se mantendrá negativo. Entonces la posición del móvil alcanza un *máximo* (absoluto) en $t = 1$. Es decir, el valor $y(1) = 1$ corresponde a un máximo (absoluto). Aparentemente el móvil cambia de sentido en $t = 1$ para moverse hacia abajo.

De (2) deducimos (puesto que en ese caso necesariamente $\Delta t > 0$) que el signo de la diferencia está dado por el signo de $2 - \Delta t$, esto es

$$y(0 + \Delta t) - y(0) \text{ es } \begin{cases} (+) & \text{si } \Delta t < 2 \\ 0 & \text{si } \Delta t = 2 \\ (-) & \text{si } \Delta t > 2 \end{cases}$$

Luego, notamos que si $\Delta t < 2$ el móvil se encuentra por arriba de $y(0)$, esto es de la posición inicial, mientras que si $\Delta t > 2$ se encuentra por debajo de su posición inicial $y(0)$. El hecho de que los únicos valores extremos posibles de la función ocurren en $t = 0$ (mínimo local) y en $t = 1$ (máximo absoluto) en las posiciones $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$, respectivamente, sugieren que no hay más cambios de sentido en el movimiento adicionales al que ocurre en $t=1$. Pues tratándose de puntos interiores, cada cambio de sentido en el movimiento representa un valor extremo y recíprocamente cada valor extremo representa un cambio de sentido.

Retomando la ecuación general (1) y factorizando a Δt tenemos

$$y(t+\Delta t)-y(t)=(-2t+2\ \Delta t)-\Delta t^2=\left(-2t+2-\Delta t\right)\Delta t\,.$$

Pensando en las unidades físicas, leemos la diferencia $y(t+\Delta t)-y(t)$ en el miembro izquierdo, como el cambio de posición ocurrido después de transcurrido un tiempo Δt. Luego tenemos

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=(-2t+2)-\Delta t \quad \text{(Velocidad promedio en el intervalo} [t,t+\Delta t]\text{)}$$

De acuerdo a la filosofía que se ha venido utilizando, para Δt "suficientemente" pequeño podemos despreciar al término $-\Delta t$ en el miembro derecho. Para Δt "suficientemente" pequeño el cociente (interpretado como velocidad) se comportará como el coeficiente diferencial $-2t+2$. Esta velocidad "límite" (Δt se aproxima arbitrariamente a cero) se define como la *velocidad instantánea*. Luego, la velocidad instantánea en cualquier instante *t*, está dada por el coeficiente diferencial $-2t+2$.

Independientemente de la interpretación física, el comportamiento límite del cociente de diferencias $\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$, cuando Δt se aproxima arbitrariamente a cero, se conoce como la *derivada* de la función y se denota con $y'(t)$. En nuestro caso $y'(t)=-2t+2$. Por cierto, en física se utiliza $\dot{y}(t)$ como notación para la velocidad instantánea.

Podemos reescribir la ecuación (1) como:

$y(t+\Delta t)-y(t)=y'(t)\cdot\Delta t-\Delta t^2$, donde $y'(t)=-2t+2=2(1-t)$ con $t\geq 0$

Como hemos visto, si $y'(t)\neq 0$ y Δt es "suficientemente" pequeño, tendremos que $y(t+\Delta t)-y(t)\approx y'(t)\cdot\Delta t \quad ...(3)$

En particular, como $\Delta t>0$, el signo de la diferencia $y(t+\Delta t)-y(t)$ será el mismo que el signo de la velocidad $y'(t)\neq 0$. Esto es, cuando $y'(t)$ es positiva el valor de $y(t+\Delta t)$ crece (al menos inicialmente) con Δt, lo que se traduce en que el móvil se desplaza inicialmente hacia arriba (esto es, hacia posiciones mayores), pues el tiempo siempre crece.

Por el contrario, cuando la velocidad $y'(t)$ es negativa el valor de $y(t+\Delta t)$ decrece, al menos inicialmente, mientras crece Δt (el tiempo siempre crece), lo que se traduce en que el móvil se desplaza inicialmente hacia abajo (esto es, hacia posiciones menores). La ecuación (3) nos habla de que la velocidad (instantánea) es una constante de proporcionalidad que determina qué tanto se desplaza inicialmente el móvil (subiendo o bajando con respecto al tiempo transcurrido). El signo determina si sube (+) o baja $(-)$, mientras que la magnitud de la velocidad (llamada la *rapidez*) nos habla de la intensidad del movimiento.

De la fórmula $y'(t) = -2t + 2 = 2(1-t)$, vemos que $y'(t)$ es $\begin{cases} (+) & \text{para } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{para } t = 1 \\ (-) & \text{para } t > 1 \end{cases}$

De lo anterior deducimos que durante el primer segundo ($0 \le t < 1$) la velocidad instantánea $y'(t)$ es positiva todo el tiempo luego, el móvil se mueve sostenidamente hacia arriba (la función posición es creciente), pues el móvil sube sin detenerse. Después del primer segundo ($t > 1$), el movimiento se realiza sostenidamente hacia abajo (la función posición es decreciente), pues no se detiene. En el instante $t = 1$ el móvil se detiene instantáneamente ($y'(1) = 0$), esto es, antes de ese instante sube e inmediatamente después baja.

En resumen, en este ejemplo, se introducen, entre otras, nociones muy importantes: velocidad y rapidez instantáneas y además con este modelo físico en mente deducimos que el signo de la derivada (al interpretarse como velocidad) determina la monotonía de la función y con ello los intervalos de monotonía.

Otra ventaja del nuevo método propuesto es que al expresar la diferencia en la forma $f(x) - f(x_0) = E_0(x_0)(x - x_0) + E_1(x_0)(x - x_0)^2 + .$,. i.e. valuada en el punto x_0 y con un incremento $h = x - x_0$, nos permite comprobar que al mirar realmente muy de cerca a la gráfica de la función diferencia ($f(x) - f(x_0)$), con centro en el punto $(x_0, f(x_0))$, sólo se puede apreciar su *parte lineal*: $f(x) - f(x_0) = E_0(x_0)(x - x_0)$ (es decir es la parte que *domina*), la cual es precisamente la ecuación de la recta tangente a la curva en x_0 cuya pendiente es $E_0(x_0)$ (i.e. $f'(x_0)$, la derivada de la función en x_0). Más precisamente, en notación clásica, la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

El hecho de que solamente se observe su aproximación lineal, corrobora que las potencias de orden superior a $h = x - x_0$ (i.e. h^2, h^3, etc.) se vuelven *despreciables* (con respecto a *h*) al aplicar el "zoom in", esto es, al hacer los valores del incremento $h = x - x_0$ "suficientemente" pequeños pero diferentes de cero.

Para ejemplificar lo anterior consideremos $f(x) = x^2$ con $x \in \mathbf{R}$. Como siempre, desarrollemos la diferencia $f(x+h) - f(x)$: $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$, donde los valores de *h* permisibles son todos los números reales.

Del desarrollo anterior resulta claro que $f'(x) = 2x$ para cualquier real x, por lo que la *función derivada* (f') está dada por esa fórmula.

Ahora, veamos (de hecho "muy de cerca") la gráfica de la función, para lo cual es conveniente, en primer lugar, cambiar *x* por un punto fijo x_0 y al incremento *h* por la diferencia $h = x - x_0$, esto es, $f(x) - f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2$, donde $f'(x_0) = 2x_0$.

Para fijar ideas, pensemos en el punto de la gráfica de $y = x^2$ que tiene como abscisa x_0, esto es la pareja de coordenadas (x_0, y_0), donde $y_0 = f(x_0)$. Consideremos como el centro de la gráfica a dicha pareja y observemos lo que sucede cuando la miramos "muy de cerca", esto es para valores alrededor de $(x_0, f(x_0))$ "suficientemente" cercanos. Así, tomemos por ejemplo, $x_0 = 1$ y luego miremos muy de cerca alrededor del punto $(1, f(1)) = (1,1)$. Entonces para empezar $f(x) - f(1) = 2(1)(x-1) + (x-1)^2$, o sea, $y - 1 = 2(x-1) + (x-1)^2$ (Note que si se despeja y de la última expresión, obtenemos desde luego $y = x^2$).

Grafiquemos la expresión $y - 1 = 2(x-1) + (x-1)^2$ en Derive haciendo centro en (1,1). Se observa la siguiente curva

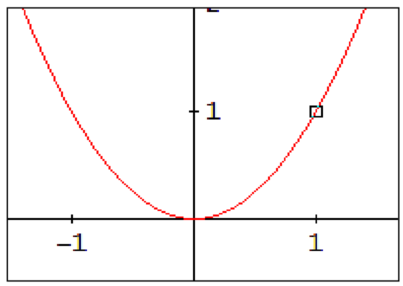
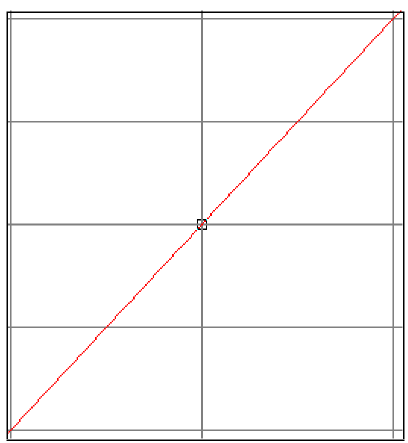


Figura 3

Realizando acercamientos sucesivos, aparentemente la gráfica de la función se "convierte" en la siguiente recta,



Escala 0.0001 : 0.0001

Figura 4

Para calcular la pendiente de esta recta le pedimos al software que nos muestre la cuadrícula (*grids*). Fácilmente se puede apreciar, en la gráfica de la recta, que por cada "cuadrito" que se avanza en el eje de las abscisas se suben dos en las ordenadas, es decir $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

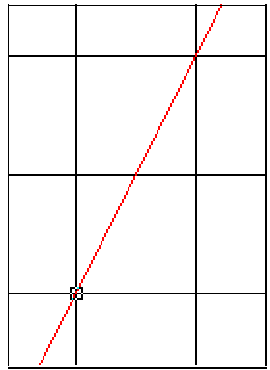
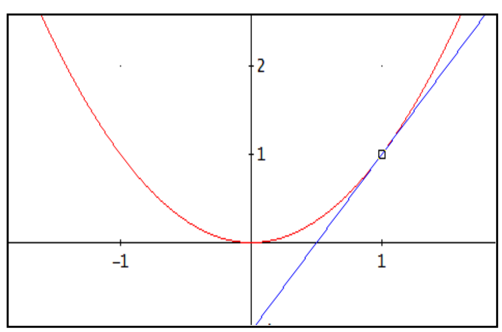


Figura 5

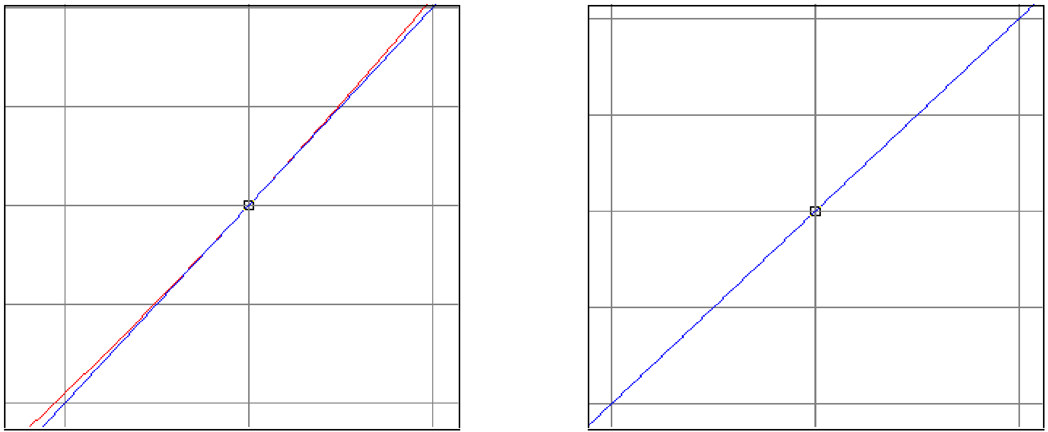
La ecuación de la recta que pasa por el punto (1,1) y tiene pendiente finita $m = 2$, es $y - 1 = 2(x - 1)$. Esto quiere decir que, cuando miramos a la función muy de cerca, solo se ve la parte lineal de la diferencia $y - 1 = 2(x - 1) + (x - 1)^2$, lo que nos indica que la parte cuadrática, $(x - 1)^2$, se vuelve despreciable al aplicar el “zoom” (i.e. para valores del incremento $x - 1$ suficientemente pequeños).

La recta $y - 1 = 2(x - 1)$ recibe el nombre de *recta tangente* a la gráfica de la función en el punto (1,1).

De esta manera, con la ayuda de la tecnología (el “zoom in”), damos la interpretación de la derivada como la *pendiente* de la recta tangente y podemos llegar a ver el *contacto* que existe entre la tangente y la gráfica en la cercanía del punto de tangencia, algo que con el acercamiento tradicional de la tangente como la “secante límite” no se logra (Riestra y Ulin, 2003). Para ver dicho contacto, graficamos simultáneamente la gráfica anterior con la tangente y haciendo acercamientos sucesivos, con centro en (1,1), vemos que la curva se “embarra” en la tangente hasta que acaba confundida con ella:



Escala 1:1



Escala 0.1: 0.1 Escala 0.0001: 0.0001

Figura 6

Conviene aclarar, para concluir, que tanto la propuesta de Andreu-Riestra como la de Aguilar-Riestra, son consistentes con el desarrollo histórico de la derivada, en franca contraposición con la tradicional que invierte el orden histórico. Como la historiadora de las Matemáticas Judith V. Grabiner (1983) hace notar, la derivada fue primero *utilizada* (implícitamente), después *descubierta*, luego *desarrollada* y finalmente *definida*, abarcando en este proceso más de dos siglos, mientras que en la enseñanza se procede justamente a la inversa del orden histórico, esto es, empezando por una definición general. La mencionada historiadora se pregunta, con sobrada razón, si no residirán en esto las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el Cálculo.

Así, en ambas propuestas, en concordancia con el desarrollo histórico, se desarrolla una derivada algebraica, de hecho la *función derivada,* en contraposición con la tradicional que introduce, en su lugar, la *derivada* en forma *puntual.* Y también en las dos propuestas, a través de problemas se van desarrollando, o se ve la necesidad de desarrollar, los conceptos y la teoría asociada, mientras que en la tradicional se presenta tal desarrollo en forma más o menos abstracta (para funciones en general) postergando siempre las aplicaciones (hasta que a veces es demasiado tarde) y por lo tanto a los problemas que muestran el poder del Cálculo y que justifican y le dan sentido a las nociones y al desarrollo de la teoría.

Bibliografía

Aguilar, A. M. (2007). *Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. D. F.

Andreu, M.E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico epistemológica de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (157-174). Morelia, Mich., México: Morevallado Editores.

Andreu, M. E. (2006). *Propuesta alternativa para un curso de cálculo diferencial acorde con el desarrollo histórico epistemológico de la derivada y con apoyo computacional*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Andreu, M. E. y Riestra, J. A. (2007). ET SI NOUS EN RESTIONS À EULER ET LAGRANGE? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des ètudiants non mathématiciens en début d'etudes supérieures. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, Irem de Strasbourg*, *12*, 165-187.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivate from Fermat to Weiertrass. *Mathematics Magazine*, *56* (4), 195-206.

Riestra, J. A. (2001). El método de Fermat para la determinación de Extremos de Polinomios. Una Visión Moderna. *Miscelánea Matemática*, 34, 103-112.

Riestra, J. A. y Ulin, C.A. (2003). Tangencia, contacto y la diferencial. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (218-241). México: Fondo de Cultura Económica.

Angélica María Aguilar
amacerrillo@yahoo.com

Jesús Alfonso Riestra
riestra@cinvestav.mx