Revisitando la noción de función real

Carlos Armando Cuevas Vallejo
DME, CINVESTAV-IPN, México
ccuevas@cinvestav.mx

François Pluvinage
Université Louis Pasteur IREM, Francia
pluvin@math.u-strasbg.fr

Resumen. El concepto de función real ha constituido un referente natural para la modelización de diversos fenómenos de las ciencias naturales y sociales, de ahí que este concepto constituye el día de hoy un concepto matemático básico y necesario para poder interactuar en nuestro entorno socio cultural. Sin embargo, el concepto de función es uno de los conceptos más controvertidos y estudiados desde el punto de vista histórico, epistemológico, educativo y matemático Por esta razón, los reportes sobre el problema de su adquisición por parte de profesores y estudiantes son numerosos y frecuentes. Para justificar la necesidad del concepto de función dentro del conocimiento básico matemático, en este artículo se realiza una analogía entre los conocimientos básicos de alfabetización y los principios básicos de la matemática, ambos necesarios para poder establecer una comunicación efectiva en nuestra sociedad. Además, presentamos una propuesta didáctica para introducir el concepto de función mediante actividades que consideramos promoverán una mejor comprensión de los aprendizajes, sus objetivos y sus etapas. El presente artículo es una versión aumentada corregida y actualizada de un artículo publicado hace 10 años por Pluvinage y Cuevas (2006).

Palabras clave: Función real, propuesta didáctica, alfabetización matemática, tecnología digital

Abstract: The concept of real function has been a natural reference for the modeling of various phenomena of the natural and social sciences, hence this concept constitutes today a basic mathematical concept and necessary to interact in our socio-cultural environment. However, the concept of function is one of the most controversial and studied concepts from the historical, epistemological, educational and mathematical point of view. For this reason, reports on the problem of its acquisition by teachers and students are numerous and frequent. In order to justify the necessity of the concept of function within basic mathematical knowledge, this article makes an analogy between the basic literacy knowledge and the basic principles of mathematics, both necessary to establish effective communication in our society. In addition, we present a didactic proposal to introduce the concept of function. Through activities that we consider to promote a better understanding of the learning, its objectives and its stages. This article is a corrected and updated version of an article published 10 years ago by Pluvinage and Cuevas (2006).

Key words: Function, didactic proposal, Mathematical literacy, digital technology,

1. Las funciones en los estudios didácticos

1.1 Habilidades matemáticas fundamentales y habilidades esperadas por la sociedad

La palabra inglesa *literacy* tiene el sentido de habilidad de leer y escribir la lengua común. Se podría establecer que es el conocimiento básico necesario para poder interactuar desde el punto de vista del lenguaje en nuestra sociedad. Por este motivo éste era un importante objetivo de la escuela, aún antes de la generalización de la educación escolarizada para todos los niños. Otro objetivo, fue el aprendizaje del conteo y de las operaciones aritméticas elementales. Hoy día, la escuela es más ambiciosa. En el caso de las matemáticas podemos distinguir varias habilidades que se pueden designar por palabras construidas estableciendo un paralelo con el modelo *literacy* y que constituyen un conocimiento básico desde el punto de vista de las matemáticas, que consideramos necesario para interactuar en nuestra sociedad actual. Además, son verdaderos rellanos en los aprendizajes:

- *numeracy,*
- *rationacy,*
- *algebracy*
- *funcionacy*

La primera, *numeracy*, corresponde al objetivo ya descrito; conocimiento de los números y operaciones aritméticas. La segunda, *rationacy* se refiere también a un conocimiento numérico, aunque más avanzado; a partir de concepciones meramente multiplicativas, contiene las proporciones y el manejo de fracciones; incluye también conocimiento de magnitudes y elementos de razonamiento lógico. La tercera *algebracy* es la que aparece en particular en los estudios de Filloy y Rojano (1989), con la consideración de sistemas matemáticos de signos (SMS); abarca resolución de ecuaciones y manejo de expresiones que incluyen variables y/o parámetros (Filloy, Puig y Rojano, 2008). La última en la lista corresponde a un conocimiento funcional que describiremos más adelante.

Nos parece interesante destacar dos características de la lista propuesta:

- El orden de presentación de las habilidades en la lista podría sugerir un orden de enseñanza y adquisición,
- La adquisición generalizada de las habilidades que están en la lista después de *numeracy* son propuestas susceptibles de discutir.

En cuanto a la primera característica, podemos asegurar que *rationacy* y *algebracy* suceden evidentemente a *numeracy*. Los estudiantes, que Hart (1987) llama *adders* tienen un manejo sumamente eficiente del conteo y de las operaciones aritméticas, pero sólo en la suma (una multiplicación es para ellos una suma repetida, y algo como la obtención del área de un triángulo les parece misterioso). Sin embargo, a pesar de que hay vínculos entre el manejo de fracciones y proporciones y el uso de escrituras algebraicas, existe también cierta independencia.

El pensamiento funcional y el concepto de función suceden claramente a los anteriores y contiene uno entre sus propiedades un concepto importante: el de variación que a su vez contiene todo lo referente a proporcionalidad.

Con respecto a la segunda característica, podemos observar que socialmente prevalece un pensamiento aritmético elemental que no sobrepasa *numeracy*, prueba de ello es que casi todos los documentos oficiales, tales como textos de leyes, se apoyan sobre este conocimiento aun en casos en los que la información se podría simplificar notablemente con el uso de expresiones matemáticas. En un caso tan sencillo, como una situación de proporcionalidad, la expresión meramente verbal puede parecer algo verdaderamente complejo. Por ejemplo, esta situación se presenta en un artículo de la ley vigente en México sobre mejoras de infraestructura hidráulica.

Cámara de Diputados del
H. Congreso de la Unión

LEY DE CONTRIBUCIÓN DE MEJORAS POR OBRAS PÚBLICAS Y FEDERALES DE INFRAESTRUCTURA HIDRÁULICA

Nueva Ley D.O.F. 26/12/1990

...Artículo 7 – II

> Tratándose de acueductos o sistemas de suministro de agua en bloque realizados exclusivamente con inversión federal, el monto de la contribución obtenida en el artículo anterior se dividirá entre la capacidad de suministro del sistema, medida en metros cúbicos por segundo, y el cociente obtenido se multiplicará por el volumen asignado o concesionado por la Comisión Nacional del Agua a cada usuario del sistema, medido en metros cúbicos por segundo y el resultado será el monto de la contribución a cargo de cada contribuyente.

De una cuidadosa lectura del artículo se desprende algo equivalente muy sencillo de expresar con otro tipo de pensamiento o grado: A partir de una contribución total T, se define la contribución unitaria *t* en m^3/seg. Así $t = T/c$, donde *c* es la capacidad de suministro del sistema. Luego, si el consumo asignado a un usuario es de *x* m^3/seg, el monto de su contribución será igual a *xt*.

Observamos que, a pesar de un claro esfuerzo de precisión, el texto de la ley contiene una inexactitud desde el punto de vista de las magnitudes. El texto se refiere a un volumen y la unidad de medición que le asigna es el metro cúbico por segundo. Hemos elegido un ejemplo sencillo, pero el lector interesado podrá constatar casos semejantes en que al verbalizar relaciones numéricas se encuentran situaciones verdaderamente complejas. Lo que nos interesa señalar es que en un texto de ley se definen todas las operaciones aritméticas necesarias y se evita el empleo de variables denotadas por letras. Es por eso que mencionamos que los textos de leyes se apoyan sobre un conocimiento que no sobrepasa al nivel matemático de pensamiento aritmético o *numeracy*, o dicho en otras palabras, se quedan en el rellano de la numeración y las cuatro operaciones aritméticas.

Esta es una de las razones por lo que nos parece que la educación elemental actual debería permitir a los estudiantes, ir más allá de este primer nivel matemático, e impulsar a que la sociedad alcance los niveles de *racionacy* y *algebracy*. E incluso a un nivel funcional, siempre y cuando no se utilicen definiciones formales y sofisticadas. Luego entonces, consideraremos que el nivel funcional en una extensión más completa se dirige a estudiantes de nivel básico y medio superior en adelante.

1.2 Diferencias en las definiciones de función y subconceptos relacionados

Hemos identificado dos problemas en la enseñanza de función. Por una parte, la mayoría de los textos de matemáticas institucionalizados, de donde se nutren muchos de los textos de la educación matemática elemental, definen función con una gran carga formal y de forma general. Por otra parte, como veremos enseguida podemos extraer de la red de Internet definiciones contradictorias. Dado que gran parte de las praxeologías del medio docente establece su marco de referencias y creencias en base a las definiciones de los libros de texto institucionales, se plantea la necesidad de exponer una pequeña muestra de los libros de texto más usuales en los primeros cursos universitarios, que pueden revelar el origen de ciertas creencias y prácticas docentes para el tratamiento que se le da al concepto de función.

- Una función de *X* a *Y* es una regla (o método) para asignar un (y sólo un) elemento de *Y* a cada elemento de *X*, donde se aclara que, por lo general, *X* e *Y* son conjuntos de números reales. (Stein y Barcellos, 1995, 13).
- Una función *f* de un conjunto *D* en un conjunto *S* es una regla que asigna un único elemento *f(x)* de *S* a cada uno de los elementos *x* de *D* (Adams, 2009, 29).
- Una función *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto *A* exactamente un elemento, llamado *f(x)*, de un conjunto B. Además, consideramos funciones para las cuales los conjuntos *A* y *B* son conjuntos de números reales (Stewart, 2001, 12).
- Sean *X* e *Y* dos conjuntos de números reales. Una función real *f* de una variable real *x* de *X* a *Y* es una correspondencia que asigna a cada número *x* de *X* exactamente un número *y* de *Y* (Larson, Hostetler y Edwards, 1999, 25).

- Una función *F* es un conjunto de pares ordenados *(x, y)* ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si *(x, y)* pertenece a *F* y *(x, z)* pertenece a *F*, entonces *y=z* (Apostol, 1996, 42).
- Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un elemento del mismo conjunto o de otro. Una función real es la que asigna a cada número real, de cierto conjunto de números, otro número real (Bers, 1978).
- Una función es una colección de parejas de números con la siguiente propiedad: Si *(a, b)* y *(b, c)* están ambas en la colección, entonces *b=c*. En otras palabras, la colección no puede contener dos parejas distintas con la misma primera coordenada (Spivak, 1967, 60).

Como se observa las definiciones son extremadamente generales y con un lenguaje matemático sofisticado y riguroso. Díaz (2007), señala que las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto de función parecen centrarse en su complejidad y generalidad, ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones.

¿Cuál es la razón por la cual el objeto función usualmente se presenta de forma general y con carga formal? Podemos mencionar que una de las razones es que las funciones son objetos que los matemáticos se vieron en la necesidad de estudiar por razones externas e internas a la matemática. Esto es, al modelar desde su aparición diversos fenómenos físicos y sociales el estudio de las funciones tiene que ver con el estudio de ciencias ajenas a la matemática misma y su desarrollo a partir de nociones vagas e inexactas ha sido gradual (Monna, (1972) e incluso Kleiner, (1989) afirma que éste continua en evolución. Al no ser el concepto de función un objeto matemático "puro" se ha ido reformulando en el tiempo (Rüting, 1984), lo cual ha provocado agrias y serias discusiones entre notables matemáticos en diversas épocas. De estas controversias se ha generado nueva matemática y además se ha tenido que precisar el objeto función, pero como el concepto de función incluye conceptos no menos complejos que también se han venido desarrollando en el tiempo, su evolución ha sido lenta. Las controversias más importantes que se conocen son: una "la controversia de la cuerda vibrante" y otra la "controversia alrededor de 1900" (Kleiner, 1989; Monna, 1972; Youschkevitch, 1976). Además, diversos estudios muestran que es probable este concepto presente obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1992). Podríamos suponer que las dificultades se han resuelto con la reflexión general sobre los fundamentos de las matemáticas, pero los reportes indican que en realidad los conceptos funcionales siguen sin estar claramente definidos. En efecto, Sierpinska (1992) y Sfard (1989), reportan que los libros de texto de álgebra y cálculo utilizados en las escuelas y universidades ofrecen diferentes versiones del concepto de función que generalmente dan origen a interpretaciones que dejan de lado características importantes del concepto. Por su parte Hitt (1988), Nicholas (1966), Norman (1992), y Goldenberg (1988), por mencionar algunos, han hecho investigaciones acerca de las dificultades y errores que presentan los estudiantes con el uso de las diferentes versiones de la definición de función.

Esto se confirma con las definiciones de los libros de texto institucionalizados Para confirmar lo anterior, en este artículo, nos limitaremos a considerar tres conceptos: *función*, *función real*, y *continuidad*. A manera de comprobar las definiciones dadas en diversos textos, mostraremos la siguiente experiencia.

Si se deseará determinar las propiedades de la función definida por $f(x)=1+\sqrt{cos(2\pi x)-1}$, un breve examen de la función basta para convencernos de que, en los números reales, la fórmula expresada en $f(x)$ sólo tiene sentido para los números enteros, y que $f(x)$ toma el valor 1 en cada entero. Entonces $f(x)$ es una función discreta, de tal manera que no se tiene sentido plantear el problema de su continuidad. Por otra parte, si se consultan, en textos de amplia difusión, las definiciones para funciones reales y continuidad para investigar las propiedades que estas definiciones atribuyen a nuestra función, encontraremos lo siguiente.

En la red Internet, el sitio Mathworld (en inglés) es generalmente considerado una buena referencia, por correcta y constantemente actualizada. Para las funciones encontramos

> Several notations are commonly used to represent (non-multivalued) functions. The most rigorous notation is $\mathrm{f}: x \to \mathrm{f}(x)$, which specifies that f is function acting upon a single number *x* (i.e., f is a univariate, or one-variable, function) and returning a value f(*x*). To be even more precise, a notation like "$\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where $\mathrm{f}(x) = x^2$"is sometimes used to explicitly specify the domain and range of the function. The slightly different "maps to" notation $\mathrm{f}: x \mapsto \mathrm{f}(x)$ is sometimes also used when the function is explicitly considered as a "map".

En este sitio o como en otros de prestigio se considera que función y aplicación (map o mapping) son palabras sinónimas. Con respecto a función real se encuentra que

> A function whose range is in the real numbers is said to be a real function, also called a real-valued function.

Según Mathworld, tenemos que considerar en nuestro ejemplo que $f(x)$ es una función real, porque su rango es un subconjunto de los reales. Con respecto a la continuidad en Mathworld, encontramos que la definición consiste en escribir que $f(x)$ es continua en x_0 si tiene a $f(x_0)$ como límite y el límite se define como:

> In this formalism, a limit *c* of function *f*(*x*) as *x* approaches a point x_0, is defined when, given any ε > 0, a ∂ > 0 can be found such that for every *x* in some domain *D* and within the neighborhood of x_0 of radius ∂ (except possibly x_0 itself), |f(*x*) - *c*| < ε.

Por lo tanto, la función $f(x)$ que consideramos es continua en todo punto de su dominio, porque *f* cumple con la definición dada de la continuidad en un punto x_0 del dominio de *f*. Esta última condición expresada en (ε, ∂) usa sólo un cuantificador universal para x. Dado que en nuestro caso la desigualdad se verifica siempre con la elección de ∂ =0.5, podemos asegurar que $f(x)$ tiene a 1 como límite en todo punto de su dominio.

Ahora bien, se puede suponer que algo escapó a Eric Weisstein, autor del sitio con ayuda de la *National Science Foundation*, debido a su interés en matemáticas más avanzadas. Consultamos ahora la enciclopedia universal multilingüe Wikipedia, en sus versiones española, inglesa, y francesa. Para las matemáticas, esta enciclopedia es un poco menos avanzada que Mathworld, pero está bien documentada y generalmente correcta. Un título, en la versión en español, nos llamó la atención, "funciones reales y discretas".

> **Funciones reales y discretas.** Si el dominio de una función es un intervalo de la recta real la función se denominará *real*. En cambio, si la función está definida para los números enteros se denominará *función discreta*. Un ejemplo de una *función discreta* son las sucesiones.

Nuestra función $f(x)$ se puede denominar función discreta en el sentido de este texto. Pero como se puede constatar, el texto completo deja muchos aspectos en la oscuridad y no es del todo correcto: Una sucesión no tiene a los enteros como dominio, sino sólo los naturales, entonces no se podría denominar función discreta en el sentido de la definición escrita. La penúltima oración ya impide por ejemplo que una función no definida en cero sea discreta. Por otra parte, usualmente en matemáticas una sucesión se define como una función cuyo dominio es una parte infinita de los números naturales (y no un dominio de todos los enteros). Y de acuerdo con la definición la función $z(x)=\frac{1}{x}$, que no tiene como dominio un intervalo, sino los reales excepto cero, no sería una función real. Además, desde el punto de vista gramatical, la última oración es incorrecta (singular: un ejemplo, y plural: las sucesiones).

En el texto francés de la misma enciclopedia se introduce la idea de *correspondencia funcional*, en la que un elemento del dominio tiene 0 o una imagen. Además, se introduce una distinción entre el conjunto de definición de una función y su dominio.

> Formellement, une **fonction** *f* d'un ensemble *E* dans un ensemble *F* est une *correspondance* ou *relation fonctionnelle*; c'est donc un *triplet* (*E* , *F* , *G*) où *G* est un sous-ensemble de *E*x*F* dans lequel chaque élément de *E* n'apparaît au plus qu'une fois.
>
> - *E* est l'ensemble **de départ** de *f*;
> - *F* est l'ensemble **d'arrivée** de *f*;
>
> et *G* est le **graphe** de *f*; *G* est noté parfois «G_f» ou «*G*(*f*)» pour préciser de quelle fonction on parle.

Con respecto a la continuidad, si consideramos el texto español de Wikipedia, la definición de la continuidad se cumple en el caso de $f(x)=1+\sqrt{cos(2\pi x)-1}$, lo que nos conduciría a concluir que la función es una función discreta continua. Al contrario, en el texto francés, no se cumple porque la noción de límite en un punto supone que este punto sea un punto de acumulación del dominio. Es decir, esto nos conduciría a concluir que la función que consideramos no es una función continua.

Para resumir, podemos decir que en general se encuentran dos tipos de acercamientos en los libros de texto y documentos en línea. O bien un campo de definiciones intenta abarcar todos los casos posibles, de tal forma que en unos textos resulta insuficiente o incorrecto (situaciones presentadas por MathWorld o Wikipedia español), en otros textos aparece demasiado avanzado para un nivel elemental (caso de Wikipedia francés, que toma como prerrequisito la noción topológica de punto de acumulación). O bien un texto se limita a introducir funciones cuyo dominio es una parte de los números reales y considera problemas de límite y continuidad para funciones definidas sobre intervalos. Este último nos parece correcto y fácilmente entendible, aunque la contraparte es que el concepto general de función tendrá que ser definido posteriormente.

Nuestra elección personal, abierta a discusión, será entonces proponer una definición de función real como una aplicación de un segmento de la recta real a los números reales. Esta definición será suficiente para la introducción de límites y continuidad, en este sentido la presentación de funciones definidas sobre intervalos es suficiente. Sin embargo, queda una cuestión. ¿Cómo introducir los números reales? De acuerdo con la teoría de los registros semióticos, se requieren cuando menos dos representaciones distintas para un objeto matemático. Entonces para los números reales a un nivel elemental, proponemos los siguientes dos registros:

- como la abscisa de un punto en una recta graduada,
- como un desarrollo decimal, eventualmente ilimitado.

La doble representación propuesta nos permite admitir equivalencias de la forma: 0.999... = 1, sin necesitad de presentar una prueba formal completa. La definición por sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind se podrá considerar en fases de aprendizaje ulteriores, especializadas.

Todo lo anterior se reduce a la elección de las bases matemáticas convenientes para la enseñanza de las funciones, y ciertamente este es un aspecto esencial del tema, pero deja abiertos todos los aspectos meramente didácticos. Estos aspectos se consideran a continuación.

1.3 Investigaciones didácticas sobre el concepto de función o temas relacionados

Existen numerosos artículos tanto a nivel interno del DME como en el ámbito internacional, incluso esta información crece día a día. Así que el intentar hacer un resumen de todos ellos por razones de espacio no sería posible. Además, de que, por su continua producción, el estudio quedaría incompleto. Dentro de la consideración de avances didácticos que este documento presenta, nos quedaremos en recordar que la consideración de *"registros semióticos"* se introdujo en la investigación de Ismenia Guzmán para su tesis doctoral (Guzmán, 1990) sobre la representación de funciones. Raymond Duval (1988) introdujo por primera vez la expresión en un artículo que elaboró en relación con temas encontrados en particular en esta investigación.

Como muestra de las investigaciones alrededores de las funciones anotamos los resultados de un breve estudio, sobre la producción científica-académica alrededor del concepto de función en el DME, tomaremos para ello el período del 2000-2004. En esta etapa se han publicado en revistas y congresos internacionales 32 artículos, se han publicado en editoriales de prestigio 2 libros con tema y título de función, se han financiado dos proyectos internacionales con apoyo de los gobiernos, para el estudio de problemas de aprendizaje con funciones, se han elaborado 10 tesis de maestría relacionadas directamente con el concepto de función, dos tesis de doctorado y un reporte de posdoctorado. Cabe mencionar que el DME inicia oficialmente sus actividades en el año de 1974 y este resultado es sólo de los últimos cuatro años de los 30 de existencia. Los aspectos que tocan estas publicaciones son, como ya se ha señalado dentro de marcos teóricos como la epistemología, las ciencias de la cognición, y la computación. Experiencias didácticas con y sin apoyo de tecnología, estudios detallados sobre aspectos matemáticos de las funciones elementales, e incluso estudios del desarrollo histórico. Esto muestra la preocupación en el DME, que por cierto comparten en otras latitudes, por los problemas en el la enseñanza y aprendizaje del concepto de función. Esto muestra además que la producción internacional sobre este tema es de verdaderamente abrumadora.

2. Hacia escenarios didácticos de aprendizaje de las funciones

2.1 Aprendizajes participativos

El estudio de lo que la sociedad requiere y que la comunidad científica y educativa (la *noosfera*) desea ha permitido precisar objetos y progresos en la enseñanza. Esto se ha realizado tomando en cuenta aspectos cognitivos. Dada la enorme complejidad del concepto de función, evidentemente éste es un concepto que tendría que ser enseñado y aprendido en aproximaciones sucesivas. Para las funciones reales proponemos de inicio el estudio de las funciones polinómicas de grado 1 y 2 de variable real (lineales y cuadráticas) como un estudio que debería ser de interés para todo estudiante, cualquiera que sea su especialidad. El siguiente estudio corresponde a un aprendizaje más avanzado y será el estudio de las funciones reales; finalmente para un aprendizaje especializado el estudio de las funciones en general. Es importante también pensar en el diseño de actividades matemáticas. Las actividades determinan situaciones que juegan un papel meramente matemático, puesto que situaciones-problemicas se sitúan en el centro del pensamiento matemático, pero también es importante el aspecto didáctico de las actividades a proponer. Por ejemplo, Brousseau (1997) sostiene en su teoría de las situaciones, dos aspectos didácticos sumamente importantes: la implicación que las situaciones tienen sobre la naturaleza de los intercambios entre docente y estudiantes (reemplazar el solo "yo aclaro y tu aplicas" por una ayuda a la resolución y debates científicos), y la posible riqueza de la producción estudiantil que permite analizar dificultades y avances. En artículos anteriores (Cuevas y Pluvinage 2003 y 2005), presentamos el beneficio de conducir una enseñanza en forma sistematizada mediante proyectos de acción prácticos y su aplicación a un aprendizaje funcional. Nos proponemos ahora examinar condiciones para la elección de situaciones que tengan un interés en la enseñanza del cálculo.

2.2 Competencias

Es preciso considerar, en primer lugar, las competencias que deseamos que los estudiantes adquieran. Los objetos matemáticos por utilizar son:

- un valor numérico, exacto o aproximado,
- una pareja de valores numéricos,
- un intervalo, que puede ser ilimitado,
- una variable, una pareja de variables,
- funciones elementales: algebraicas (polinómicas, racionales y radicales), funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales,
- una función en general.

Para la presentación de funciones se utilizarán fundamentalmente cuatro registros semióticos: las tablas numéricas, las representaciones gráficas, las teclas de calculadora o programas de cálculo, y las fórmulas explicitas. Los tratamientos generales que se aplicaran a estos objetos son: las operaciones numéricas (suma, producto, resta, división, raíces), la comparación, la sustitución. También es necesario recordar que muchas funciones se manipulan mediante representaciones parciales. Por ejemplo, una gráfica se presenta dentro de un marco limitado. Además, algunos tratamientos son más o menos específicos de un registro: por ejemplo, una trasformación geométrica cambia una curva en otra, o una fórmula de cambio de variable define una nueva función

Evidentemente dada la extensión del concepto de función, éste es un concepto que tendría que ser enseñado y aprendido año por año. Para las funciones reales proponemos iniciar con el estudio de las funciones lineales, después se puede realizar un primer acercamiento a las funciones reales a partir de observaciones o experimentos. Esto conduciría a considerar diversas maneras de representar una función real. Dentro de la categoría de las tablas numéricas se introducen diferencias entre tablas completas (p. ej. tabla de tarifas de envío por correo; los precios según el peso), tablas de valores, con una precisión determinada (p. ej. tablas trigonométricas), y tablas de datos, con una precisión en muchos casos desconocida (depende de los aparatos de medición y de la actuación de operadores). En etapas de aprendizaje posteriores, será importante no olvidar el recurso de los diversos registros. Invitamos al lector a estudiar el ejercicio siguiente, para darse cuenta (autoobservación) de lo que moviliza su resolución. Una sugerencia de tratamiento de este ejercicio en caso de dudas es el uso de una hoja de cálculo, con el recurso de una representación gráfica.

Ejercicio

La tabla 1 construida por un estudiante nos presenta los valores de dos polinomios P(x) y Q(x) de grado dos. Al revisarla se advierte que cada renglón contiene un error. Encuentra el error, en cada renglón.

x	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	5	6	3	-4	15
$Q(x)$	16	0	-10	0	-12

Tabla 1. Valores de los polinomios.

2.3 Principios y elementos para el diseño de escenarios didácticos

Es posible apoyarse en el conocimiento adquirido en torno a conceptos relacionados con las funciones reales, para pasar a estudios de tipo exploratorio que deriven a un acercamiento didáctico más completo. Se trataría de considerar por un lado las diversas etapas de adquisiciones para estudiantes de orientación físico-matemática, abarcando el cálculo y el análisis matemático hasta las ecuaciones diferenciales, y por otro lado los aprendizajes útiles o necesarios para diversas especialidades con necesidades específicas (computación gráfica, ingeniería, diseño, contaduría, ciencias sociales, etc.). En algunos de estos casos, las matemáticas discretas tendrán un peso mayor que en el caso físico-matemático.

Para la implementación didáctica hemos puesto en práctica los principios didácticos que enunciamos en el artículo de Cuevas y Pluvinage (2003). Los primeros tres principios básicos son los siguientes:

> Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción. Que en el caso de la enseñanza de las matemáticas, no tiene por que ser necesariamente una acción física, sino por el contrario, es esencialmente mental[1]. En este sentido es importante señalar que sea el propio educando quien mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas.
>
> Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un determinado tema, por lo que toca decidir al docente, cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal[2].
>
> Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de validar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo con el problema planteado (Cuevas y Pluvinage, 2003).

2.4 Primera aproximación al objeto función: caso lineal

Para el caso de la función lineal proponemos un proyecto de acción práctico como el siguiente, que presenta elementos parecidos a los que se introducen en una situación real de producción y compra.

Estudio: *Una compañía vende un mantel a $ 23.45 por unidad. El producir este artículo, le implica*

[1] Recuerde que estamos pensando en estudiantes de nivel medio superior y superior.
[2] La definición formal, corresponde al grado escolar del educando.

a la compañía tener costos fijos (renta de un local, luz, etc.) de $ 4,500.00 al mes y costos variables (compra de materia prima, gastos de promoción, etc.). En esta compañía se estima que los costos variables representan un 40 % del ingreso total. Basado en esta información, el gerente de producción desea saber cuál es la relación entre el valor unitario del producto y el ingreso total, al vender un número determinado de artículos; el costo de producción de estos artículos, el costo por unidad y la cantidad de unidades que deberá vender la compañía para cubrir los gastos.

Antes de iniciar su solución sería conveniente tomar en cuenta el siguiente principio

> Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema. Es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requerirá para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, el cual, mediante ejercicios gradualmente dosificados, nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta (Ibidem).

Podemos descomponer este problema en tres fases. Primero la obtención del ingreso como función lineal del tipo $f(x)=ax$, enseguida la función costo en donde se obtiene la función lineal como una composición del ingreso resultando al final una función del tipo $f(x)=ax+b$ y por último como una aplicación, el punto de empate.

Este proyecto de acción se podría iniciar proponiendo a los estudiantes llenar una tabla donde en la primera columna escriban el precio por unidad, en la siguiente la cantidad de artículos vendidos y en la tercera el ingreso obtenido. Una vez que el estudiante haya llenado un número suficiente de casillas en una tabla como la anterior se le podría proponer encontrar la relación que determina el ingreso al vender un número *x* de artículos. De aquí surge en forma natural la relación

$$I=23.45x \quad \text{O bien} \quad y=23.45x .$$

Y como *I* depende de *x* surge también natural proponer la relación

$$I\left(x\right)=23.45x$$

Si en un plano cartesiano graficamos esta relación mediante la simple unión de puntos $\left(x\ ,\ I(x)\right)$ calculados en la tabla se obtiene una recta. Con esto estaremos cubriendo dos puntos más de la propuesta didáctica.

> Cada vez que enseñemos un determinado concepto de las matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajar el mismo (si el concepto lo permite) en los otros registros de representación que le sean propios.
>
> Si un concepto matemático se opera en más de un registro de representación semiótico, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la articulación (traslación) entre los diferentes registros (Ibidem).

Es conveniente que en este ejercicio se realicen actividades en cada registro y que cada una de ellas se visualice en los demás. Por ejemplo, al trabajar o evaluar para algún valor de *x* la relación algebraica $I\left(x\right)=23.45x$, el resultado deberá verse reflejado en la tabla correspondiente y al dibujar el punto se reflejará en el registro gráfico. De igual forma si se toma un punto de la recta, se vera la relación correspondiente con la función y su tabla.

Es conveniente iniciar con la gráfica una discusión sobre el dominio y rango de esta función. Y diferenciar esta función de otras lineales con dominio todos los reales. Pero este ejercicio no estará terminado si no se añaden dos elementos más de la didáctica a saber:

> Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.
>
> Cuando se ilustre una forma o método para resolver un problema, intentar dar una forma de solución alternativa. En todo caso, nunca imponer una forma de solución (Ibidem).

En nuestro caso deberemos proponer ejercicios para que el estudiante determine la cantidad que se tiene que vender para un determinado ingreso. Por ejemplo, ¿cuantos artículos se tienen que vender para obtener un ingreso de 32,000.00? y por supuesto promover diversas formas de solución.

2.5 Etapa de formulación de problemas del objeto *función real*

En la gran mayoría de los libros de texto y de los documentos de uso didáctico, se encuentra un capítulo de presentación de la noción general de función que no sirve de nada a los estudiantes, y tampoco a los profesores, sino en introducir unas palabras y notaciones cuyo verdadero sentido surge del uso que se hace en capítulos ulteriores. Es el fenómeno que se observa en el párrafo en el que discutimos de definiciones funcionales. Nos parece importante reemplazar una introducción a través del puro discurso acompañado de tablas o figuras que contemplar, por algo que introduzca interrogantes, cuya resolución precisamente conduzca a la construcción de los conceptos deseados. Presentamos a continuación elementos que tomar en cuenta para el diseño de escenarios didácticos en esta dirección, dejando al lector interesado la construcción completa de los recursos que introducir utilizando los diversos registros semióticos, en el salón de clase o en la red si se trata de enseñanza a distancia.

En una experimentación sobre funciones, será importante introducir un proyecto de acción concreto en el que el concepto de función surja a partir de la solución del problema. En relación con el tema del agua, cuya importancia hoy es vital, sería interesante un estudio que conduzca a determinar la cantidad de precipitación pluvial en una región. Un utensilio llamado pluviómetro permite medir la altura diaria de lluvia. Una versión simplificada, hecha a partir de una cubeta, podría permitir unas mediciones, por así decir, durante un periodo de un día, una semana, etc. Además, el servicio meteorológico nacional publica en línea la hoja de datos que presentamos en anexo. En relación con los conocimientos geográficos de los estudiantes, una pregunta que plantearles es: *¿Cómo se caracteriza el clima de México?* La noción misma de clima implica que se consideren cantidades obtenidas durante ciertos intervalos de tiempo, por ejemplo, cantidades mensuales. Pero ¿cómo obtener precisamente una función de los meses del año hacia las alturas de lluvia? La tabla en el anexo proporciona posibilidades de respuesta. Luego podremos considerar el año como un parámetro. De cualquier forma, una tabla como la del servicio meteorológico nacional nos conduce a considerar que vale la pena hacer la distinción entre tablas de valores de funciones (con una precisión elegida), y tablas de datos de un fenómeno (con una precisión generalmente desconocida).

2.6 Etapa de estudio de un caso modelo

Uno de los mayores problemas es el contar con un proyecto de acción práctico, cuya solución mediante diversas actividades conduzca a una promoción en la adquisición del concepto matemático. En el caso de funciones en general proponemos el tema de poleas. Este es un problema sencillo de plantear, aunque no necesariamente de resolver, es un problema de interés real y se puede plantear independientemente de toda forma de expresión de las funciones. Su resolución conduce a examinar todos los componentes o subconceptos que aparecen en el concepto de función real. Es decir, al resolverlo se examinan los significados de: variable independiente y dependiente, parámetro, dominio, rango, etc. Además, permite la observación directa de cantidades, lo cual no es posible cuando se consideran modelos que refieren a magnitudes diferentes. Otra ventaja es una adecuación evidente del modelo con la realidad. Sin embargo, si cabe cualquier duda, no es difícil ni caro presentar a los estudiantes una realización concreta, o pedirles que construyan una.

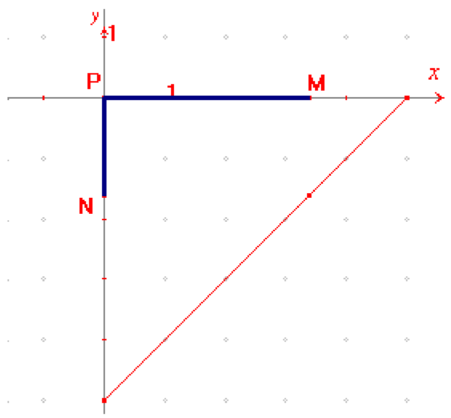


Figura 1: Caso básico de polea. La polea esta en P, el punto M se mueve. Observe como N se desplaza.

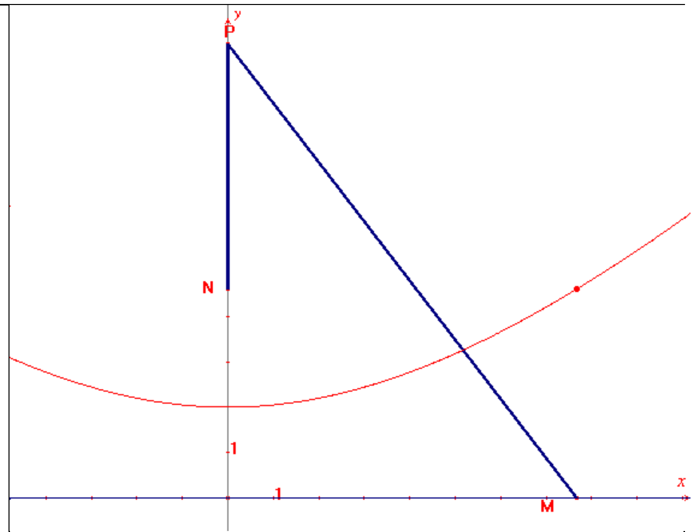


Figura 2: Polea colgada en un punto más elevado que el punto M.

En el caso elemental representado en la figura 1, con un cable de longitud dada, una polea P (cuyo tamaño en el modelo puede considerarse como nulo), el punto M, de abscisa *x*, se mueve horizontalmente y el punto N, de ordenada *y*, verticalmente. Con la disposición que hemos escogido, la gráfica de la función x→y coincide con el lugar geométrico del punto del plano que tiene M y N como proyecciones ortogonales. El desplazamiento del punto de coordenadas (x, y) es lineal. Lo dibujamos en este artículo, pero en un escenario de enseñanza sería un objeto de descubrimiento de parte de estudiantes. En el análisis matemático del modelo, además de la dos variables *x* y *y*, vale la pena estudiar el rol de parámetro que tiene *l*, la longitud del cable.

Es posible introducir variantes al problema que nos lleven a situaciones no tan sencillas de estudiar, para producir resultados interesantes. Por ejemplo, en la primera situación considerada, podemos situar la polea P en otro punto del eje Oy (véase figura 2). En vez del segmento anterior, obtenemos un arco de cónica. Otra investigación se puede hacer en el caso (no representado) de una localización de la polea P en otro punto del plano, el punto N siempre desplazándose sobre el eje Oy.

El tercer caso representa una polea y un punto fijo, y conduce a un estudio funcional bastante completo (ver figura 3), lo que por ejemplo en el estudio gráfico permite una explotación de los principios didácticos presentados por Bloch (2003) para favorecer el surgimiento de conjeturas y el interés en pruebas.

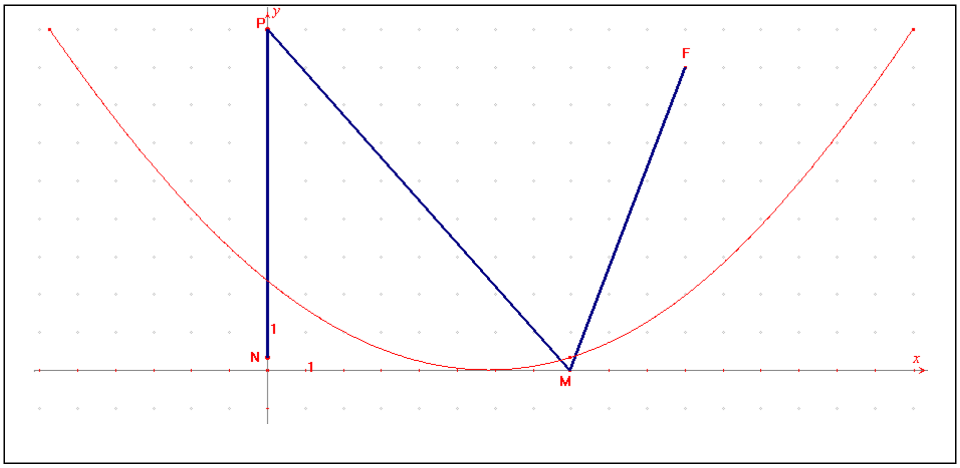


Figura 3: Polea P y punto fijo F. Arrastrar M, la longitud del cable FMPN se conserva constante.

En el experimento didáctico nos importará una *fase descriptiva* que tome en cuenta interrogantes como la determinación de los extremos para el movimiento del punto M, o el punto más bajo alcanzado por N, antes de estudiar luego estos aspectos en un acercamiento cuantitativo. En el caso ilustrado, el problema de saber si el punto N va a tocar el suelo (eje O*x*) en algún momento es por ejemplo un pequeño reto. Para la búsqueda de la respuesta a este interrogante y su prueba, serán útiles los recursos que nos proporcionan los registros de representación previamente citados (tablas numéricas y fórmulas en particular). Incluso podemos pensar en un estudio bastante avanzado, si introducimos cambios de uno u otro de los parámetros: longitud *l* del cable, coordenadas del punto fijo F, altura de la polea P.

2.7 Etapa de generalización

En la mayoría de los casos de una correspondencia entre variables, las representaciones geométricas se refieren a puntos situados en ejes rectangulares. Un primer paso de generalización consiste entonces en presentar situaciones con disposiciones diferentes. Esto se ilustra en la figura 4, en la que el punto M se mueve sobre un eje paralelo al eje Oy. Para obtener la representación gráfica de la función x→y, que será semejante a la gráfica de la figura 2, tendremos por ejemplo que utilizar una trasformación geométrica, que desplace adecuadamente el eje en el que se mueve M.

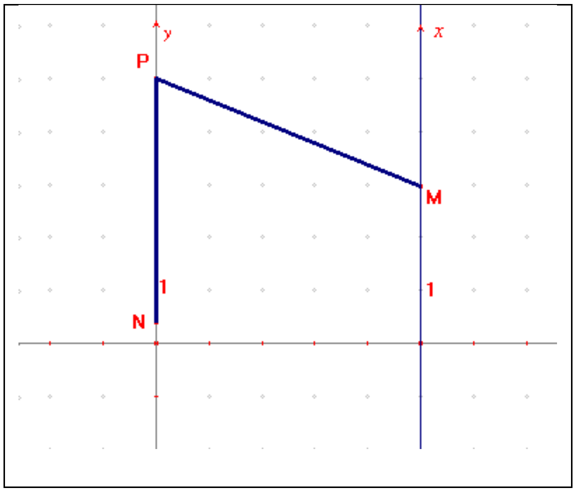


Figura 4: Polea P con desplazamiento vertical de M

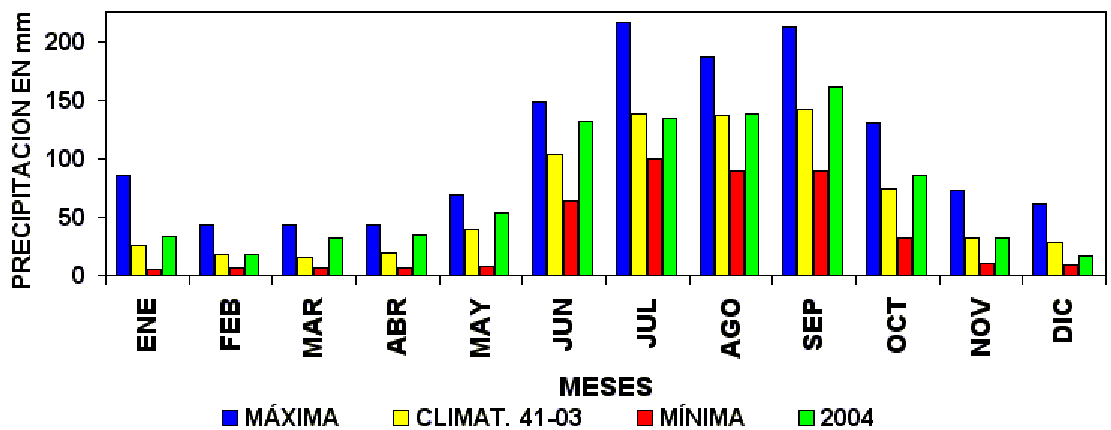
Un segundo paso de generalización consistirá en el estudio de las *nociones relacionadas* con el objeto *función real de variable real*. Las funciones usuales, tal como se expresan en los diversos registros, constituyen el soporte de la *tecnología matemática* a introducir; También es importante considerar funciones que relaciones magnitudes diferentes (longitud y área, longitud y volumen, tiempo y longitud, etc.). En este artículo, nos limitamos en considerar el estudio del caso lineal y la introducción de las funciones reales en general. En un artículo anterior (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005), hemos presentado un experimento de funciones para el aprendizaje del teorema de los extremos alcanzados por una función continua, apoyándose sobre un modelo de globo inflable en un recipiente, que genera un examen del papel de variables y parámetro. Otras investigaciones están desarrollándose ahora sobre unas funciones usuales, y sobre temas como la integración, que ojalá completarán en el futuro el presente texto de carácter general.

3. Conclusiones

Hemos propuesto al concepto de función como parte de lo que podemos denominar como alfabetización matemática. Es decir, parte del conocimiento básico que un individuo requiere para comunicarse e interactuar en el entorno social actual. También hemos documentado en parte que desde el punto de vista histórico, epistemológico, educativo y matemático, este es un concepto complejo y que a través de la historia las controversias de notables matemáticos alrededor de este concepto han impulsado desarrollos de la matemática en todos los campos. Pero que incluso para ellos ha sido complejo el tratar de dar una definición clara y consistente, por tal motivo diversos historiadores y matemáticos consideran a este concepto en evolución. Incluso en época actual la información sobre el concepto de función es contradictoria a pesar de acudir a sitios prestigiados. Por esta razón, los reportes sobre el problema de su adquisición por parte de profesores y estudiantes son numerosos y frecuentes. La propuesta didáctica consiste en una introducción gradual del mismo, mediante proyectos de acción prácticos o contextos de aplicación en donde el estudiante constate de inicio la importancia de este concepto. El problema continua y por este motivo no sería extraño tener mucha más información y propuestas en los años venideros

Anexo: Una página del servicio meteorológico nacional.

PRECIPITACIÓN MEDIA, MÁXIMA Y MÍNIMA DE LA REPUBLICA MEXICANA
PERÍODO 1941-2003



PRECIPITACION MEDIA MENSUAL Y ANUAL EN mm
PERIODO 1941-2004

AÑOS	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ANUAL
1941	29.5	24.7	21.8	27.8	49.9	120.7	137.9	118.4	184.5	88.0	34.1	46.2	883.5
1942	20.3	20.6	13.0	13.4	47.9	92.0	153.6	177.8	162.7	49.8	41.4	26.8	819.3
1943	35.0	9.8	13.7	13.9	34.4	118.8	119.7	131.9	176.7	72.3	39.1	49.9	815.2
1944	20.0	19.2	25.1	9.3	32.1	117.0	102.9	185.0	200.2	55.7	39.0	18.6	824.1
1945	20.0	10.9	11.5	8.9	24.7	70.1	127.2	146.7	101.6	93.6	12.4	11.2	638.8
1946	35.5	14.7	7.6	31.3	38.7	96.7	105.2	124.8	145.7	94.1	33.0	38.0	765.3
1947	35.8	15.0	11.3	17.6	59.7	98.6	105.6	186.5	124.1	77.4	43.1	56.0	830.7
1948	26.5	25.4	10.3	18.1	45.4	106.2	160.1	108.3	148.8	80.5	38.3	31.4	799.3
1949	45.5	20.0	11.5	17.1	36.7	98.0	122.7	106.7	151.8	64.6	14.0	31.0	719.6
1950	27.2	14.3	22.8	19.0	43.5	103.1	159.1	96.6	121.4	79.7	10.4	9.0	706.1
1951	12.3	8.5	18.9	10.5	42.2	91.3	130.6	127.3	135.9	71.5	23.2	21.4	693.6
1952	10.1	10.1	16.4	32.1	45.0	141.7	143.3	124.8	137.8	42.2	36.5	22.4	762.4
1953	4.7	17.8	10.8	12.2	23.2	83.1	132.0	131.1	95.1	89.2	27.5	26.0	652.7
1954	18.4	12.6	9.7	23.6	52.4	117.2	140.4	127.1	143.2	90.0	15.4	9.1	759.1
1955	29.3	10.8	9.3	8.8	26.4	66.7	215.7	169.4	212.1	97.0	26.7	20.4	892.6
1956	16.5	10.1	6.5	15.0	67.8	115.6	125.7	101.3	114.8	46.9	27.3	20.9	668.4
1957	19.8	23.7	19.2	20.6	41.3	82.3	115.6	108.9	126.5	70.9	15.0	16.7	660.5
1958	47.7	24.3	26.0	9.7	43.5	139.2	153.8	129.4	203.6	130.5	60.9	29.2	997.8
1959	18.3	19.8	8.2	43.9	37.4	122.4	131.7	135.4	89.6	108.7	30.0	30.3	775.7

1960	34.1	10.5	8.5	16.3	27.2	64.9	153.9	149.4	98.8	82.4	27.9	25.5	699.4
1961	46.7	11.5	10.1	15.3	23.4	130.8	157.7	109.3	118.5	62.0	40.4	20.3	746.0
1962	20.4	9.4	12.9	28.8	24.7	107.8	111.2	107.0	147.2	73.7	24.6	25.9	693.6
1963	15.5	11.3	10.8	18.1	39.4	101.4	162.8	122.3	146.0	55.1	29.5	36.2	748.4
1964	20.2	9.6	14.9	13.1	52.5	106.3	127.3	108.1	148.4	50.6	32.0	46.6	729.6
1965	25.0	22.5	12.8	21.3	28.4	90.6	130.2	142.7	123.2	64.0	27.2	54.0	741.9
1966	27.7	28.2	17.6	28.5	51.5	128.3	131.9	156.0	123.1	93.7	18.6	27.0	832.1
1967	32.5	12.6	22.2	21.0	38.8	116.3	128.0	154.8	179.0	83.2	30.2	50.0	868.6
1968	29.7	32.6	39.8	32.2	40.5	95.3	152.1	135.5	145.1	68.3	30.9	37.3	839.3
1969	23.6	20.9	13.4	13.6	30.8	67.2	156.3	160.9	141.8	66.5	32.1	25.1	752.2
1970	18.7	25.7	13.8	9.6	30.0	123.8	142.4	162.3	183.1	45.8	18.9	8.9	783.0
1971	11.8	7.5	11.1	12.3	33.6	126.4	120.1	163.0	142.9	97.3	26.7	20.8	773.5
1972	23.0	11.0	15.1	15.6	59.3	132.1	156.9	134.3	112.4	73.9	53.0	22.9	809.5
1973	25.9	39.9	9.5	16.3	39.5	135.3	143.8	158.6	149.8	83.8	22.4	20.5	845.3
1974	22.6	16.5	14.6	21.3	36.9	102.9	144.3	122.4	170.6	53.2	36.2	25.2	766.7
1975	25.1	11.0	9.1	8.1	47.3	85.1	153.5	138.4	135.5	63.5	21.0	20.0	717.6
1976	20.0	16.8	12.4	26.4	35.3	107.2	196.8	121.5	142.5	96.0	73.3	29.8	878.0
1977	20.9	10.0	6.0	17.2	36.7	110.8	107.5	128.0	101.1	67.4	30.1	26.2	661.9
1978	19.1	28.5	29.5	12.3	39.1	107.5	142.3	134.3	194.3	92.1	30.0	37.4	866.4
1979	36.5	18.3	17.2	20.4	41.6	98.5	127.2	141.5	116.4	35.7	20.1	43.5	716.9
1980	34.5	23.3	12.5	21.7	34.0	74.2	114.9	157.5	151.9	63.9	35.3	25.8	749.5
1981	56.3	25.9	22.6	41.9	44.9	148.4	149.3	163.5	139.5	87.5	17.5	25.5	922.8
1982	18.5	19.3	13.2	27.5	55.8	64.4	112.8	89.0	111.3	62.8	41.3	53.6	669.5
1983	29.3	44.0	43.1	11.0	41.6	65.2	155.6	143.9	151.4	74.8	40.3	29.5	829.7
1984	54.4	13.4	8.2	8.7	64.7	132.9	176.5	144.1	153.2	52.7	23.8	60.8	893.4
1985	36.0	16.5	15.0	37.2	51.5	126.9	139.8	118.8	106.1	65.5	31.9	25.4	770.6
1986	15.2	14.9	10.7	26.3	57.4	122.7	115.8	103.8	125.2	83.0	36.8	36.2	748.0
1987	20.1	22.0	16.8	21.8	52.6	101.4	152.5	113.8	104.1	32.1	28.2	23.8	689.2
1988	20.2	13.2	17.7	21.7	24.8	121.6	162.4	173.8	123.8	49.7	17.9	18.8	765.6
1989	22.5	12.7	9.7	14.0	26.1	85.7	110.0	158.9	124.1	52.4	34.6	41.1	691.8
1990	23.8	25.8	18.7	14.9	44.7	80.4	201.7	157.7	153.9	92.8	30.8	32.7	877.9
1991	17.9	22.1	10.7	10.2	30.3	99.9	171.5	103.8	155.5	72.2	43.3	59.0	796.4
1992	86.2	30.5	19.0	26.6	51.6	69.1	130.0	132.1	124.7	74.2	39.1	26.2	809.3
1993	43.2	15.3	14.2	15.8	34.2	133.4	117.6	164.1	204.0	70.4	33.0	14.4	859.6
1994	25.5	13.7	13.7	18.9	23.0	70.7	102.0	153.2	129.2	79.4	43.8	45.1	718.2
1995	22.6	22.6	16.2	18.3	38.6	89.1	122.5	179.4	127.4	66.5	35.4	28.2	766.8
1996	5.9	6.0	8.5	15.9	23.4	105.5	112.9	165.9	114.9	66.8	26.5	12.2	664.4
1997	16.8	15.8	28.3	38.5	39.6	75.0	105.6	103.3	115.7	77.1	51.5	24.9	692.1
1998	12.2	16.0	12.8	6.4	7.6	68.9	138.7	139.2	172.5	112.0	43.6	11.1	741.0
1999	8.4	8.2	11.7	14.0	25.1	126.4	154.5	138.0	150.1	80.7	18.6	18.4	754.1
2000	11.6	11.4	14.3	14.7	68.9	140.4	99.1	130.0	124.6	92.2	37.3	20.7	765.2
2001	14.8	24.2	18.0	23.7	53.2	89.9	135.1	139.2	146.2	74.0	24.4	23.4	766.1
2002	14.0	29.6	7.8	8.6	31.2	102.1	135.5	99.2	168.3	81.7	44.1	16.8	738.9
2003	13.0	18.9	12.5	10.1	34.3	115.0	133.8	133.7	172.8	107.7	33.8	10.5	796.1
2004	33.4	18.1	32.0	35.1	53.2	131.6	134.6	137.7	161.7	85.6	32.5	16.7	872.2
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ANUAL
MÁXIMA	86.2	44.0	43.1	43.9	68.9	148.4	215.7	186.5	212.1	130.5	73.3	60.8	997.8
CLIMAT. 41-03	25.3	18.0	15.1	18.9	39.8	103.6	137.8	136.4	142.0	74.3	31.8	28.6	771.6
MÍNIMA	4.7	6.0	6.0	6.4	7.6	64.4	99.1	89.0	89.6	32.1	10.4	8.9	638.8

4. Referencias Bibliográficas

Bloch I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove, *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), Springer Science and Business Media B.V.

Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, Strasbourg, IREM.

Cuevas, A. & Moreno, S. & Pluvinage, F. (2005). Una Experiencia de Enseñanza del Objeto Función. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, Strasbourg, IREM.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In P. Nesher, & J. Kilpatrick. (Eds.). Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education, pp., 113-134. Cambridge, Great Britain: Cambridge University *Press*.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, 25: 85-106.

Duval, R. (1988). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, Strasbourg, IREM.

Duval, R. (1998). Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II. Editor F. Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Filloy, E. and Rojano, T. (1989) Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics.* 9(2): 19-25.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*. 26(3): 327–342

Goldenberg, P. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: mathematical, technical and pedagogical challenges in the graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behaviours*, 7(2): 135-174.

Guzmán Retamal, I. (1990), *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction,* Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

Hart, K. (1987). Strategies and Errors in Secondary Mathematics. Mathematics in School, 16(2) : 14-17. Published by The Mathematical Association. Stable, URL: http://www.jstor.org/stable/30214189. Accedido el 22-06-2017.

Hitt, F. (1988). Obstacles related to the concept of function. *DME-PNFAPM* CINVESTAV, México e Institute of education, University of London. U.K. pp. 1-7

Kieran, K., Garançon, M., Lee, L., Bolleau, A., (1993). Technology in the learning of functions: Process to object? *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Pacific Grove, Ca. USA. 1: 91-99.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The college Mathematics Journal. 20(4): 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & *Bruckheimer*, M. (1986*).* Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2): 18-24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.). *The Ideas of Algebra*. 1988 Yearbook, pp. 43-60. Reston, VA: NCTM.

Martínez, A. M., (1993). *Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case S*tudy. Doctoral Dissertation. The Ohio State University.

Monna A. F. (1972/73). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Arch. Hist. Ex. Sci.* 9

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, D. C: National Academy Press.

Nicholas, C.P. (1966*). A* dilemma *in definition*. American Mathematical Monthly, 73: 762-768.

Norman, Alexander (1992). *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 215-232.

Norman, Alexander (1992). *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America. Notes Series, 25: 215-232.

Pluvinage, F. y Cuevas, A. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función. *Matemática Educativa 30 años. Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Compilador E. Filloy. Ed. Santillana México.

Rüting, Dieter. (1984). Some definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. 6(4).

Sfard, A. (1989*)*. Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education*, 3: 151-158. Paris, France.

Sierpinska, Anna, (1992). On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, 25: 23-58.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Arch. Hist. Ex. Sci*, 16: 37-85.