CARLOS ARMANDO CUEVAS VALLEJO, MAGALLY MARTÍNEZ REYES & FRANÇOIS PLUVINAGE

PROMOVIENDO EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO: UN EXPERIMENTO CON EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES Y SUS RESULTADOS

Abstract. Promoting functional thinking in teaching calculus: An experiment with the use of digital technology and its results. This article presents a teaching experience in a first calculus course at college level, founded on the idea of promoting functional thinking to understand the basic concepts of calculus. The experiment was conducted with freshmen, given the serious deficiencies in algebraic and functional concepts. We apply a methodological approach using digital technologies in two types of activities, which are reproducible: Introducing concepts through interactive educational scenarios (IES), which simulate real situations proposed to students, and using the tutorial system CalcVisual. In this experiment, unlike remedial courses, functional thinking is not seen as a prerequisite but as a proper object of the course. Analyzing the results, we note in particular a significant reduction in initial prerequisite deficiencies and progress in functional thinking.

Résumé. Promouvoir la pensée fonctionnelle dans l'enseignement de l'analyse : une expérimentation avec usage des technologies informatiques et ses résultats. Cet article présente une expérience d'enseignement dans un premier cours d'analyse à l'université, fondée sur l'idée de promouvoir une pensée fonctionnelle pour comprendre les notions de base de l'analyse. L'expérience a été menée avec des étudiants de première année, au vu de graves lacunes initiales dans les concepts algébriques et fonctionnels. Nous appliquons une approche méthodologique utilisant les technologies numériques dans deux types d'activités qui sont reproductibles : l'introduction de concepts à travers des scénarios éducatifs interactifs (SEI) qui simulent des situations réelles traitées, et l'utilisation du système tutoriel CalcVisual. Dans cette expérience, à la différence de cours de rattrapage, la pensée fonctionnelle n'est pas considérée comme un préalable, mais comme un objectif de la formation. Dans l'analyse des résultats, nous notons en particulier une réduction significative des manques initiaux de prérequis et des progrès dans la pensée fonctionnelle.
Mots-clés. Calcul différentiel, Pensée fonctionnelle, Simulation, Système tutoriel.

Resumen. Este artículo presenta una experiencia de enseñanza para un primer curso de cálculo diferencial en la universidad, fundamentada en la idea de promover un pensamiento funcional para la comprensión de los conceptos del cálculo. La experiencia fue realizada con estudiantes de primer ingreso, al detectar graves deficiencias en conceptos algebraicos y funcionales. Aplicamos una propuesta didáctica utilizando las tecnologías digitales en dos tipos de actividades reproducibles: introducción de conceptos mediante escenarios didácticos interactivos computacionales (EDIC), que simulan situaciones reales dirigidas, y el uso del sistema tutorial CalcVisual. En esta experiencia, a diferencia de los cursos remediales, el pensamiento funcional no se contempla como un prerrequisito sino como un

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 17, p. 137 – 168

objeto propio del curso. Analizando los resultados obtenidos, observamos en particular una reducción notable de las deficiencias de prerrequisitos iniciales y un avance en el pensamiento funcional.
Palabras clave. Cálculo diferencial, pensamiento funcional, simulaciones, sistema tutorial.

1. *Introducción:* ***Problemas de formación matemática al inicio del nivel superior en las carreras de ingeniería***

La matemática resulta ser una materia indispensable en la formación profesional a nivel superior en carreras del área tecnológica, y también en las áreas económico administrativas. Si se analizan los campos laborales de los egresados de carreras en estas áreas tanto en finanzas como en cómputo, los problemas de optimización y los problemas de previsión son vitales. Por lo que en todas estas carreras, no cabe duda de que se debe enseñar el cálculo. Trabajos como los de Kent & Noss (2002) y Dorier (2010) precisan por qué y cómo el cálculo tiene un sitio en el quehacer profesional de diversas ramas de la vida laboral. Por otro lado, desde un punto de vista más general, algo imprescindible en la formación profesional de un número cada vez mayor de ramas es el empleo de la tecnología, en particular de los programas de computación. El manejo de manipuladores simbólicos, hojas de cálculo, graficadores o procesadores de texto es un requisito de un sinnúmero de actividades profesionales. En el caso de las matemáticas, el cómputo sirve de apoyo a la exploración de conceptos matemáticos, su visualización y la experimentación con las mismas (e. g. Monzoy 2002). Sin embargo, los desarrollos de material didáctico no siempre se presentan acompañados de su implementación en el aula y su validación; por ello, una propuesta que logre equilibrar ambos aspectos será de suma importancia para la comunidad de matemática educativa.

En nuestro caso, en el Centro Universitario Valle de Chalco, entidad desconcentrada de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMex), desde hace 10 años se lleva un proyecto para mejorar los resultados en la enseñanza y aprendizaje del primer curso de cálculo, conjuntamente con investigaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) (e. g. Martínez 2005; Cuevas, Moreno & Pluvinage 2005). Diversos son los factores por los cuales esta universidad ha tenido poco éxito con sus alumnos de nuevo ingreso en los cursos de cálculo, aunque lamentablemente es un resultado frecuente en gran parte de las universidades en México. Las deficiencias más notables observadas son: graves carencias de prerrequisitos algebraicos, programas de estudio obsoletos, uso inadecuado de la tecnología, etc. (véanse ANUIES 2006 y el sitio en línea de ANUIES <http://www.anuies.mx/>). Una conclusión importante en estos estudios es la necesidad de manejar conceptos de pre-cálculo para una adecuada comprensión del cálculo a nivel superior. Pero eso no significa la necesidad de cursos remediales. La experiencia que presentamos se desarrolló a lo largo de un semestre universitario donde obtuvimos una promoción en la comprensión de los conceptos del cálculo y un considerable avance a solventar las deficiencias de pre-cálculo detectadas. Sin embargo, en este artículo sólo presentaremos el avance logrado en una mejor comprensión del concepto de función real de variable real, mediante la aplicación de experiencias didácticas mediadas por las tecnologías digitales. Destacamos este avance por dos razones: una es por considerarlo imprescindible para abordar los diversos conceptos del cálculo, y una segunda es porque dar cuenta de todos los resultados generaría un documento más extenso de lo recomendable para un artículo. Uno de los principales factores para lograr la adquisición del concepto de función real fue la promoción, al inicio del curso, de un pensamiento que caracterizamos como funcional y cuya descripción presentaremos más adelante.

Un elemento a considerar en esta experiencia es que los alumnos poseen una formación académica sumamente heterogénea, dado que provienen de planes de estudio diferentes y con un manejo de competencias diferentes. Incluso pueden haber cursado o no un curso de cálculo en el nivel medio superior. Otro importante elemento es el factor económico, puesto que gran parte de los estudiantes tienen la necesidad de conseguir un trabajo ajeno a sus estudios, dado que la situación económica de la región donde se aplicó la experiencia es precaria, lo que obliga en su mayoría a concentrar estudiantes de medio tiempo en la institución. Bajo estas premisas, el reto fue ¿Como estructurar un curso de cálculo que permita a un alumno de primer año universitario adquirir las competencias necesarias de acuerdo a lo que establece el plan de estudios?

Antecedentes

Al ser las funciones el modelo matemático por excelencia de casi cualquier ciencia, el cálculo diferencial e integral constituye materia obligada en los planes de estudio de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso en carreras del área de ciencias sociales. Frente a las dificultades observadas y señaladas por investigadores desde hace varios años, diversos intentos se realizaron en muchos países para mejorar los resultados de la enseñanza del cálculo. Por ejemplo, se llevó a cabo durante los años noventa en los Estados Unidos una reforma del curso llamado *Calculus 101*, pero el análisis de los efectos no reveló resultados convincentes (Darken, Wynegar & Kuhn, 2000). El primer año del nivel superior se considera en muchos sistemas de formación un año propedéutico, debido a las graves carencias académicas observadas, y consecuentemente con frecuencia se proponen cursos remediales, es decir cursos dirigidos a estudiantes que presentan deficiencias sobre los prerrequisitos del cálculo. Se supone que al cursarlos permitirán estudiar la materia exitosamente. Sin embargo, este supuesto presenta la paradoja de que en los cursos remediales se repite el mismo discurso escolar que no había sido exitoso en términos de aprendizaje (e.g. Hardy & Sierpinska, 2012), en un tiempo más breve.

En consecuencia y debido al hecho de que las mismas causas producen los mismos efectos, por lo general la eficacia de los cursos remediales resulta muy limitada (e.g. Calcagno & Long, 2008).

En el caso específico de México, otro de los problemas detectados proviene de la vinculación entre los programas y los libros de texto, sea que los programas de estudio se apegan a textos usuales de cálculo (Leithold, 1994; Steward, 2010; Swokowsky, 1988) o que los textos se desarrollan apegados a estos programas de estudio. Esto conlleva al problema que los programas de estudio de cálculo no han sufrido cambios importantes en al menos 30 años y consecuentemente no han permeado, en los mismos, las múltiples investigaciones que recomiendan una enseñanza a base de problemas y el estudio de casos realísticos. Por esta razón, la mayoría de los libros de textos, continúan mostrando la tradicional organización de contenidos del cálculo diferencial, es decir: números reales, funciones (reales de una variable real), límites (de sucesiones y de funciones), derivada, aplicaciones de la derivada. Este orden de presentación, que por lo esencial es inverso al desarrollo histórico del cálculo (Grabiner, 1983), no facilita la postura del docente aislado que busca proporcionar a sus estudiantes una formación más eficiente, pero obligado a usar un libro con esta organización. Por esta razón, nos avocamos a elaborar para un primer curso de cálculo diferencial un material didáctico que se pueda aplicar de manera autónoma, en vez de usar un libro de texto. El contenido conceptual global de nuestro curso es igual de lo tradicional, pero su organización es diferente: se estudian funciones particulares (en el inicio del curso se estudian polinomios) dentro de un marco de modelación y simulación, se consideran sus funciones derivadas a partir de una aproximación de tipo $f(x+h) - f(x) = hP_f(h)$ (véase Andreu & Riestra, 2007, p. 177), antes de estudiar los conceptos generales de función real de variable real, la derivada y los teoremas de derivación, y los números reales. Inspirándonos en el espectro de representaciones de Tall (1997, Figura 4 p. 295), proponemos en nuestra presentación:

- actividades guiadas con escenarios virtuales que proponen proyectos de acción concreta,
- actividades autónomas en grupos, con CalcVisual (software tutorial didáctico)
- tareas para el trabajo personal o en grupos de dos o tres.

Ya habíamos puesto parcialmente a prueba tal material didáctico en experimentos previos sobre proyectos de acción concretos, publicados en artículos anteriores (Cuevas & Pluvinage, 2003, y Cuevas, Moreno y Pluvinage, 2005). Nos quedaba por desarrollar y analizar un experimento más extenso, y este es el propósito en el presente artículo.

Nuestra tesis cognitiva: existencia de un estrato funcional

Según Imaz & Moreno (2010), las dos ideas fundamentales del cálculo son la variación y la acumulación. En el estudio que presentamos aquí, sólo aparece la variación, pero acompañada de la idea fundamental de que el tratamiento de variaciones ya introduce algo nuevo con respecto al álgebra conocida de los estudiantes. En efecto el álgebra la ven como la resolución de ecuaciones o sistemas. En el estudio de variaciones se introducen operaciones que usan diferentes valores de una variable, lo que difiere de la resolución de ecuaciones o sistemas estudiados por los estudiantes a nivel medio superior. Nuestra tesis del punto de vista cognitivo es que el manejo de álgebra no es suficiente: La introducción de los conceptos del cálculo supone la adquisición de una nueva forma de pensamiento y de un lenguaje, que introducen novedades con respecto al álgebra. Se puede acertar que, para aprender cálculo, el estudiante debe entrar en un nuevo *estrato* distinto del estrato algebraico: el *estrato funcional* (Adjiage & Pluvinage, 2008, y Adjiage & Pluvinage, 2012). Por ejemplo, para adquirir el *procept* de función (Gray & Tall, 1994) que combina *pro*ceso y *concept*o, el estudiante debe aprender un lenguaje específico, en el que se expresan operaciones como la composición o la inversión de funciones. Podemos darnos cuenta de que la lectura usual en la lengua hablada de las expresiones $a(b+c)$ y de $f(x+y)$ es diferente: “a [multiplicado] por b más c” en el primer caso, “f de x más y” en el segundo caso.

Otro ejemplo sencillo puede ilustrar la diferencia de lenguaje entre el estrato funcional y el álgebra: Para obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos del plano cartesiano, sean $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$, uno puede referirse a un *pensamiento algebraico*. Este le conduce a escribir el sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y b:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$

Luego elimina b al restar la segunda ecuación de la primera y calcula a, de donde obtiene b. Pero en un *pensamiento funcional*, introducirá un punto variable $M(x, y)$ y considerará que la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aplica tanto a la pareja M_1 y M como a la pareja M_1 y M_2. Así obtendrá directamente la ecuación: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Un contraste entre tratamientos algebraicos y funcionales hasta se presenta con software y no sólo en el pensamiento de estudiantes. En Adjiage & Pluvinage (2012, § 4.4) se enseña el ejemplo de la resolución con DERIVE de la ecuación $x\sqrt{x^2 - 1} = 0$. El comando SOLVE(x·√(x^2 – 1), x, Real), que se introduce para resolver esta ecuación en el campo de los números reales, proporciona tres soluciones que son -1, 0 y 1, a pesar de que la raíz cuadrada no tiene sentido en $x = 0$. En este caso, hace falta considerar el dominio de la función, además del resultado algebraico general de que un producto es nulo cuando uno de sus factores es nulo.

Son estos tipos de consideraciones (aspecto “pensamiento”) y procedimientos (aspecto “expresión”) que queremos favorecer durante el curso de cálculo y que, en nuestra hipótesis de trabajo, son más importantes que los conocimientos considerados en varios estudios como los prerrequisitos del cálculo.

Marco teórico de la experimentación desde un enfoque socio-epistemológico

El cálculo diferencial e integral es un estudio de las funciones, por ende la enseñanza del mismo tiene como propósito mostrar propiedades importantes de las funciones. Varios artículos reportan la enorme complejidad del concepto de función (Slavit, 1997; Bloch, 2003; Pluvinage & Cuevas, 2006). Las funciones, al modelar desde su aparición diversos fenómenos físicos y sociales, tienen que ver con el estudio de ciencias ajenas a la matemática misma, por lo que su desarrollo a partir de nociones vagas e inexactas ha sido gradual (Monna, 1973), e incluso Kleiner (1989) afirma que éste continúa en evolución. El concepto de función se ha ido reformulando en el tiempo (Rüting, 1984), lo cual ha provocado hasta agrias discusiones entre matemáticos ilustres. Dos son las más notables que se conocen como “la controversia de la cuerda vibrante” y la “controversia alrededor de 1900” (Monna, 1973; Youschkevitch, 1976; Kleiner, 1989). En consecuencia, además de la tesis sobre la necesidad de “entrar” en un nuevo estrato de pensamiento y expresión, presentada en el párrafo anterior, consideramos importantes actividades de modelación y de simulación en las que los fenómenos que acabamos de mencionar tengan un lugar en el quehacer estudiantil.

Por otra parte, visualizar a las nuevas tecnologías como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es algo incuestionable, puesto que los cambios que las tecnologías producen en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en el contenido (Drijvers 2003; Niss 2003; Stroup 2002; Thurston 1994). Dentro de las recomendaciones del NCTM de USA, expresadas en la página Internet titulada *The Technology Principle*, se encuentra:

> *Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning… Students can learn more mathematics more deeply with the appropriate and responsible use of technology. They can make and test conjectures. They can work at higher levels of generalization or abstraction … Students with physical challenges can become much more engaged in mathematics using special technologies. Technology cannot replace the mathematics teacher, nor can it be used as a replacement for basic understandings and intuitions. The teacher must make prudent decisions about when and how to use technology and should ensure that the technology is enhancing students' mathematical thinking* (NCTM 2011).

El empleo de las nuevas tecnologías es una opción que facilita la aplicación de propuestas didácticas, por ejemplo: conversión entre diversos registros de representación semiótica, actividades para introducir los conceptos matemáticos mediante simulaciones con un acercamiento al desarrollo histórico de los mismos, apoyo experimental a estudios matemáticos, etc. Sin embargo, cabe advertir que sin un cuidadoso diseño didáctico, tomando en cuenta el proceso de génesis instrumental, el empleo de las nuevas tecnologías puede traer más inconvenientes que ventajas; además se trata de aprender una matemática cuyos resultados sean pensados independientemente de las herramientas y superar una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza (Artigue 2002).

En efecto, el impresionante desarrollo tecnológico con el advenimiento de programas de cómputo con capacidad de manipulación simbólica, de graficación y simulación pone en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas (Artigue 2002; Ruthven & Hennessy 2002). Así por ejemplo, dentro del software con distribución comercial y distribución libre, es posible realizar muchas de las tareas usuales de un primer curso de cálculo como derivar e integrar, numérica y simbólicamente (Asiala et al. 1997; Simmt 1997). Esto cuestiona el rol del alumno cuando se limita a realizar la parte operativa del curso y genera conductas negativas y de desconcierto por parte del docente que, en muchos casos, no considera las herramientas computacionales como un recurso positivo, y hasta prohíbe el uso de calculadoras y computadoras en sus cursos.

En paralelo a este uso dubitativo de la tecnología que se refleja en los estándares del NCTM, y que resume Artigue (2002), se ha desarrollado una corriente de investigación, en los últimos años, en donde se hace una reflexión crítica alrededor de la utilidad que representan las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y el cambio de roles (Lagrange 2005). Esta problemática conduce a un primer cuestionamiento didáctico: ¿Cómo introducir la tecnología, de manera que promueva una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en el estudiante, sin desestimar su destreza operativa?

En nuestro experimento, proponemos usar las nuevas tecnologías en un primer curso de cálculo diferencial, para introducir el pensamiento funcional bajo los siguientes principios:

- Establecer la relación funcional mediante el planteamiento de un proyecto de acción concreto (Aebli, 1995).
- Instrumentar actividades para promover la comprensión de los conceptos básicos, bajo los principios didácticos enunciados en Cuevas-Pluvinage (2003).

Para realizar lo anterior, hemos utilizado fundamentalmente dos tipos de programas computacionales. El primero es un escenario didáctico interactivo virtual, con el cual, mediante la simulación de un fenómeno natural, se introduce un concepto matemático. De esta forma el concepto resulta ser una necesidad para resolver problemas. El segundo tipo de programa es el sistema CalcVisual (Cuevas y Mejía, 2003), un sistema tutorial completamente interactivo, con el que el profesor puede compartir el desarrollo del curso, al definir lo que los estudiantes pudieran realizar en forma independiente del profesor.

2. *Panorama de la experimentación*

El experimento consta de tres etapas. En una primera etapa se aplica un cuestionario diagnóstico (pre-test) a todos los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial e Integral, es decir los alumnos de nuevo ingreso de las carreras de Informática Administrativa (LIA) e Ingeniería en Computación (ICO) del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, aproximadamente 150 alumnos. En una segunda etapa se establece el nivel de inicio del curso y se trabajan Escenarios Didácticos Interactivos Computacionales (EDIC) para explorar los conceptos de variable y relación funcional. Finalmente, en la tercera etapa se utiliza el software CalcVisual para trabajar con polinomios que modelan problemas reales. Enseguida se describen a detalle cada una de las etapas.

Los grupos de primer año están constituidos de 30 a 45 personas provenientes de diversas opciones de bachillerato (técnico y general de la zona), donde sólo el 30% de la carrera de LIA e ICO tomó un curso de cálculo previamente. En entrevistas realizadas, detectamos que cada grupo era heterogéneo, ya que se encontraban personas que han llevado un estudio continuo desde secundaria, y otros que han dejado de estudiar cierto tiempo y retoman su preparación profesional. De la misma manera están en un sector los alumnos que trabajan y estudian, mientras que otro sector corresponde sólo a estudiantes de tiempo completo. En las entrevistas, detectamos que la dedicación fuera del aula para la materia de cálculo diferencial e integral es variable, con un máximo de dos horas al día.

Una consecuencia de esta problemática es que el manejo, por parte de los alumnos, de los contenidos propios de la materia es difuso. Para identificar posibles deficiencias en prerrequisitos del cálculo diferencial hemos elaborado el pre-test presentado en el Anexo 1. El instrumento ha sufrido modificaciones después de cada aplicación, con la intención de que refleje deficiencias que puedan obstaculizar el aprendizaje de los conceptos del cálculo.

En el pre-test, no pretendemos cubrir todos los prerrequisitos para un curso de cálculo que aparecen en los programas de estudio oficiales. Por ejemplo, el test no contiene temas de geometría o de trigonometría, tampoco propone considerar co-variaciones. Lo que nos importa es el nivel de competencia de los alumnos en los prerrequisitos en el sentido de los *estratos de competencia* que hemos señalado: Aritmética (suma y resta de números enteros y sobre todo fraccionarios), algebra (suma de fracciones con incógnitas, solución de ecuaciones de primero y segundo grado), funciones (evaluación numérica y literal, raíces y dominio), entre otras. Los resultados de la aplicación (véase § 4) muestran una clara deficiencia en estos prerrequisitos: Ausencia del manejo elemental de operaciones básicas de aritmética con números reales, adquisición dudosa de los fundamentos de álgebra, imprecisión para definir y evaluar funciones, y el común desconocimiento de la parte operativa de los conceptos propios de cálculo como raíces. La evaluación se realiza en red en la sala de cómputo haciendo uso del pre-test en línea, y los resultados se depositan en una base de datos expresamente creada para un procesamiento más rápido de la información, en especial para la comparación con los resultados finales. El test de opción múltiple presenta las opciones de respuesta acordes a los errores que los estudiantes cometen de manera frecuente y que ha sido documentado a lo largo de los últimos años. Cuenta además con una opción adicional para darles libertad de encontrar otra solución a las preguntas, y en algunos casos es esta opción la correcta.

El entorno de aprendizaje

Posterior al test se desarrolla el curso de cálculo mediante el uso del escenario didáctico interactivo computacional, que consta de: Applets, cuestionarios, ejercicios, practicas, etc. La elaboración de este material digital correspondió a la experiencia de un grupo de investigadores del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, para dar respuesta a la necesidad de cubrir los prerrequisitos sin detrimento de los contenidos del curso de cálculo diferencial y enfocarse a explorar los conceptos propios del cálculo.

Para introducir el concepto de función el escenario proporciona un acercamiento con la modelación de una situación real, el manejo de poleas (Figura 1), a través de tres modelos: 1) Polea introductoria que busca que el alumno delimite los conceptos de variable, variable independiente, variable dependiente y parámetro; 2) Polea simple, donde se establece una relación funcional lineal, y los estudiantes inician en el manejo de tablas, evaluaciones numéricas de la función y su gráfica; 3) Polea compuesta, que establece una relación funcional cuadrática, y los estudiantes exploran los conceptos de dominio, rango, raíces y aplican lo trabajado en la polea anterior. Al igual que el pre-test, el escenario didáctico virtual ha sufrido cambios a lo largo de cada experimentación, con la idea de facilitar la comprensión de la situación estudiada (por ejemplo no se veían burrito y cubo en las primeras representaciones de polea) y de aumentar el control de los estudiantes sobre los resultados (introducción por ejemplo de los valores numéricos al lado de representaciones gráficas).

Así finalmente el concepto de función estudiado por el alumno va más allá de su definición algebraica tradicional y se evita en cierta forma que los prerrequisitos sean un obstáculo para iniciar el estudio de los conceptos propios del cálculo. Los materiales son elaborados en diversos lenguajes de programación (Java, Flash, Cabri, Geogebra, etc.) y puestos en un servidor local para su uso y seguimiento.

Enseguida se continúa con los contenidos clásicos del temario de cálculo diferencial mediante la incorporación de CalcVisual y un Applet de Globo. Este último permite presentar una situación real que busca que los estudiantes la tratan utilizando como herramientas el curso de cálculo diferencial. En cuanto a CalcVisual (véase la figura 2), este sistema permite abordar los conceptos de raíces, signo, paridad, límites, derivada, puntos críticos y demás, mediante sesiones tutoriales.

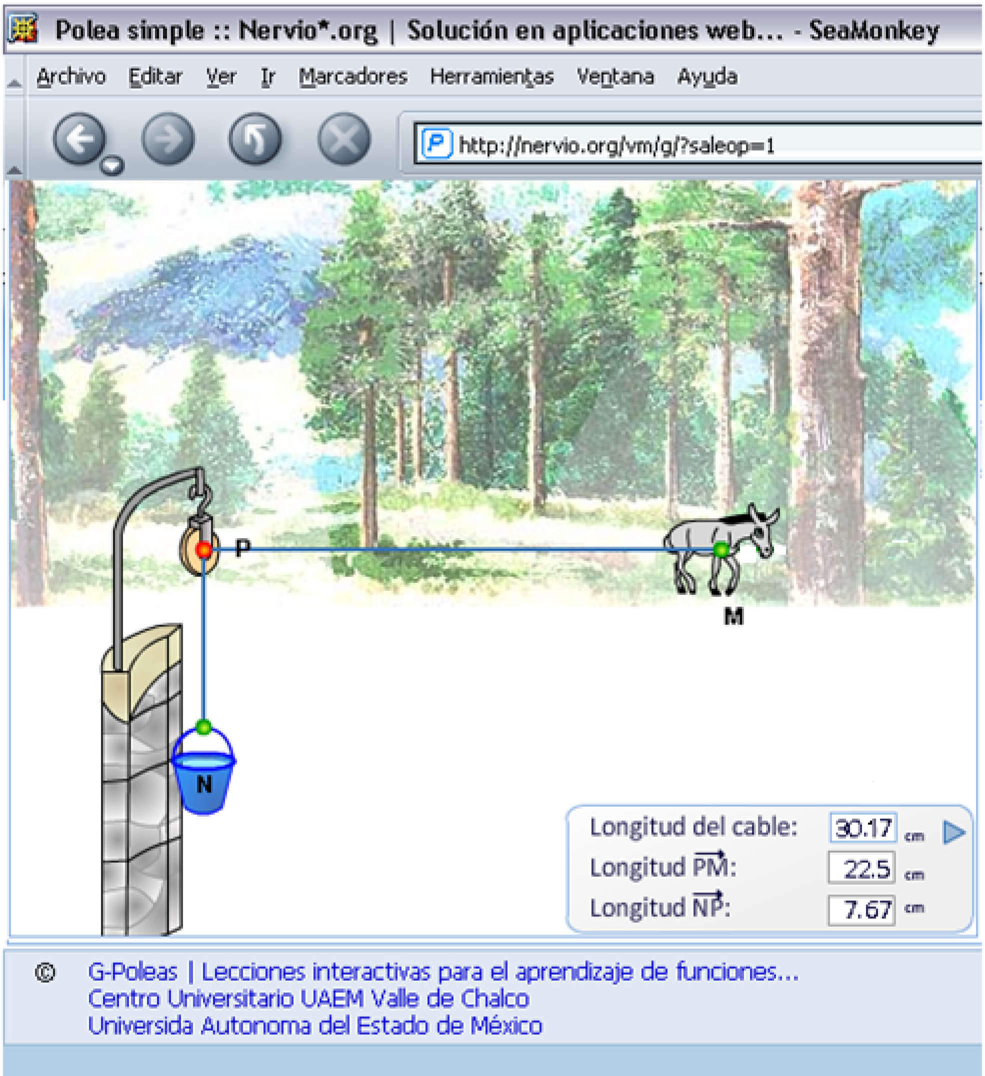


Figura 1. Simulación (aun no perfecta) del funcionamiento de una polea

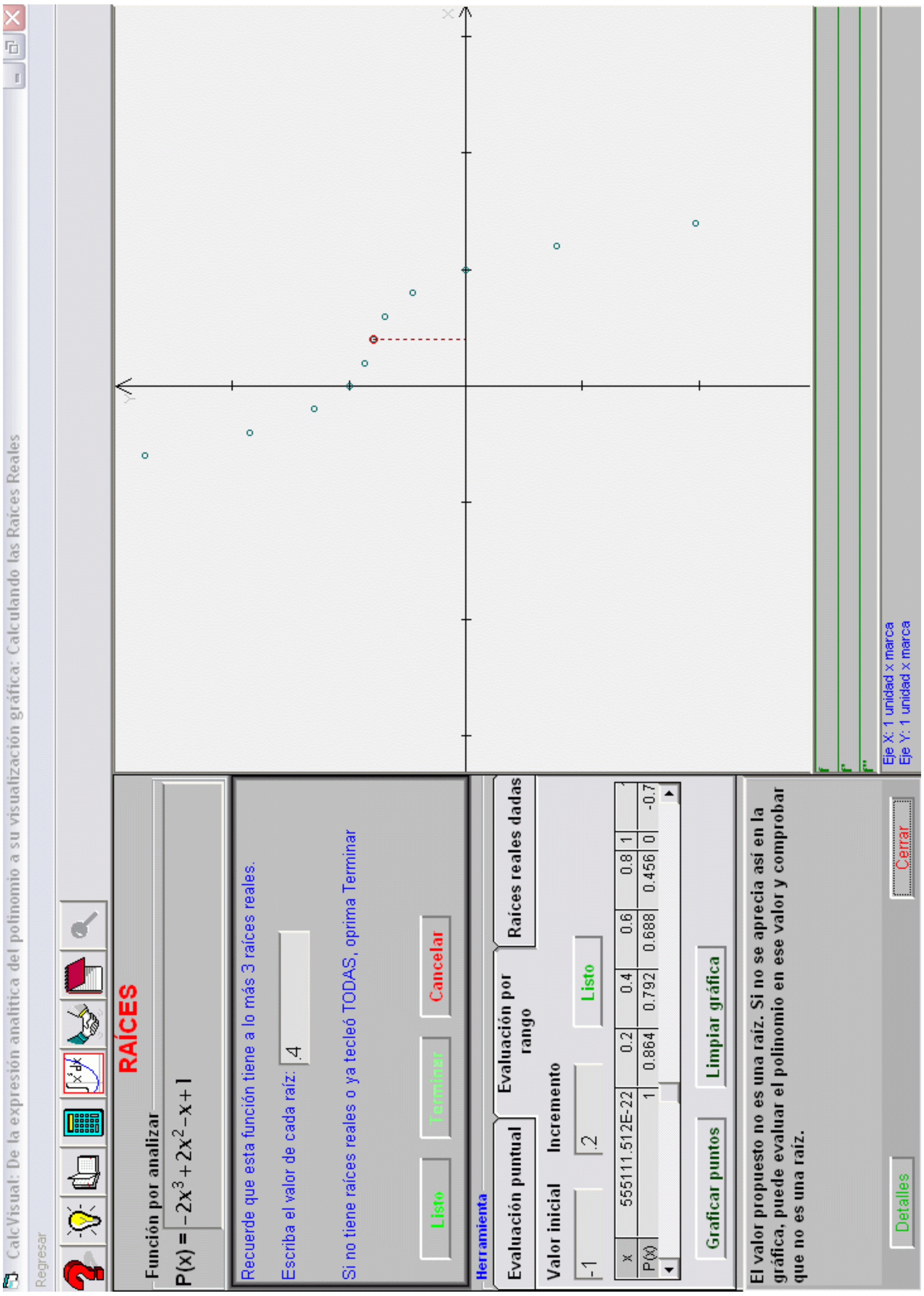


Figura 2. Una interfaz de CalcVisual

Cada concepto (raíces, variaciones, puntos críticos,…) se ilustra en CalcVisual con el objetivo de aportar elementos para analizar y construir la gráfica de un polinomio. El sistema funciona como un ayudante del profesor, que ejercita con los alumnos, en presencia o ausencia del profesor, indicando los errores y aciertos del estudiante. Además CalcVisual genera aleatoriamente una gran variedad de ejercicios. Este sistema viene acompañado de un libro (Cuevas & Mejia, 2003) que sirve de guía para su uso y propone ejercicios de retroalimentación para el usuario.

Cohabitación de enseñanza experimental y evaluación tradicional

La manera de evaluar el curso debía respetar los lineamientos oficiales que son:
- dos exámenes parciales,
- registro de tareas (ejercicios e investigaciones),
- prácticas en software (en nuestro caso CalcVisual),
- problemas de aplicación (relacionados con la especialidad de los estudiantes).

Para evaluar el nivel de avance del alumno hemos propuesto un primer examen parcial que cubre ciertos aspectos del concepto de función. Esto permite correlacionar (véase tabla 1) las limitantes en prerrequisitos, detectas en el pre-test, con el tema de función mediante una correspondencia en el manejo de las habilidades operativas de conceptos en ambos instrumentos (pre-test y el segundo examen). El segundo examen parcial cubre la parte medular del curso, abarcando los conceptos importantes del cálculo en su aplicación para funciones algebraicas; además al término del curso se aplica nuevamente el pre-test diagnóstico para observar hasta que punto se pueden superar las dificultades iniciales sin que ellas sean el propósito de una enseñanza específica (véase tabla 2).

El lector se puede dar cuenta de que las pruebas que presentamos en los anexos 1 y 2 tienen un carácter muy tradicional. En aplicaciones ulteriores, se podrán remplazar estas pruebas por otras, más relacionadas con la enseñanza propuesta, pero en este experimento que se puede considerar como piloto, intentamos mostrar que la adquisición de lo operativo no necesariamente resulta de la repetición de pruebas similares. En efecto la enseñanza aplicada no es la tradicional. El registro de tareas permite que los alumnos ejerciten con los problemas presentados en el libro y algunos otros que deja el profesor. Las prácticas se realizan con el apoyo de CalcVisual. Finalmente los problemas de aplicación se presentan al introducir un concepto, y nos después de su definición como es el caso en la forma tradicional de enseñanza. La clase de cálculo comprende cuatro horas por semana, de ellas dos son en laboratorio de cómputo para el trabajo con los escenarios didácticos y el sistema, y dos en un salón de clase con implementos usuales (pizarrón y posibilidad de proyectar desde una computadora). Hay un profesor responsable del curso, lo que garantiza la coordinación de todas las actividades.

Los problemas de aplicación para LIA, son de corte administrativo (v. gr. problemas de costo e ingreso), y para ICO son de ingeniería y física (v. gr.

Cálculos de superficies y volúmenes máximos, velocidades, etc.). Monitoreando el uso de estos modelos matemáticos se logra un curso con mayor profundidad, al estudiar problemas que van un poco más allá del programa oficial, y se retoma la motivación al estudio del cálculo en el contexto de cada carrera. Así, se trata de dar al curso de cálculo sentido para los alumnos, al contextualizarlo con problemas de su realidad profesional. De esta forma, los conceptos del cálculo diferencial cobran sentido a través de la necesidad de resolver problemas, evitando la memorización o el cálculo operativo de manera exclusiva.

Más adelante, vemos que la correlación entre los errores que los alumnos presentan en el pre-test al inicio del curso de cálculo diferencial y en el postest muestra avances significativos. Es decir, las omisiones que los alumnos presentaban al inicio del curso se han visto disminuidas en especial para suma y resta de números enteros y fraccionarios, manejo de fracciones con incógnitas, solución de ecuaciones de primero y segundo grado, pero primordialmente el tema de función: evaluación numérica y manejo de literales, caracterización de raíces y obtención del dominio de la misma; mejorando así su desempeño en estos conceptos.

Algo similar sucede en la evaluación del curso. El primer examen parcial plantea preguntas del tema de funciones ya manejadas en el inicio del curso de cálculo, mismas que se pueden relacionar con las deficiencias mostradas en el pre-test correspondientes al tema de función. Las preguntas de este examen requieren de interpretación, por lo que no sólo se evalúa la parte operativa. Los resultados observados mostraron que se lograron avances significativos. Por su parte la evaluación en el segundo examen parcial permite analizar otros aspectos como el manejo de los conceptos propios del cálculo: raíces, signo, derivada, máximos y mínimos, límites, etc., identificando avances pero también deficiencias en el tratamiento de algunos conceptos (v.g. límites) para los cuales es necesario el diseño de otros materiales de apoyo, que se puede hacer bajo la misma concepción. En nuestro experimento sí se pudo observar un avance global en términos de calificación e índices de reprobación generales y un avance puntual por concepto, sin modificar la estructura y los contenidos de la evaluación tradicional de un curso de cálculo diferencial estándar.

Condiciones para una replica

La forma de llevar a cabo la planeación de este curso como experiencia en el Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, puede ser replicada bajo las siguientes condiciones: Para un curso de cuatro o cinco sesiones a la semana, asignar dos sesiones al laboratorio de cómputo con CalcVisual, registrar a los alumnos en el sistema en línea del pre-test para su correcto seguimiento, organizar sesiones de trabajo con los escenarios didácticos interactivos computacionales y planear la retroalimentación con discusiones grupales en sesiones presénciales en el salón bajo las condiciones tradicionales. A diferencia de la experimentación que presentamos aquí y que tenía el objetivo de mostrar posibles mejoras en la evaluación usual, en una replica se podrían introducir otras pruebas de evaluación.

3. *La población y los contenidos de las pruebas aplicadas*

Aunque hemos desarrollado experiencias desde el 2006, en este artículo sólo reportaremos los resultados obtenidos durante el año 2009 dentro del grupo de ICO de primer año en la UAEMex, de 40 estudiantes Para profundizar en casos individuales posibles dificultades materiales que pueden explicar ciertos resultados, entrevistamos a algunos de los estudiantes (no relatamos aquí estas entrevistas). Por ejemplo uno nos declaró: "*Tengo 5 años sin estudiar; al inicio entro a la UAEMex, y estudio tres semestres. Dejé la UAEMex y trabajo desde hace años como fotógrafo; no pude contestar porque no sabía o no me acordaba*", y otro: "*Trabajo en electrónica y me cuesta tiempo trabajar, de 5 a 8 todos los días y sábados*".

El primer test diagnóstico se aplicó al inicio del semestre y un examen parcial se aplicó luego de un mes de curso. Al final del curso se aplicó la prueba de fin del semestre, y se aplicó de nuevo el test diagnóstico para observar los progresos específicos de los estudiantes. Es lo único que cambia con respecto a la evaluación usual, y el test no se toma en cuenta para la calificación final. Conforme lo declaramos en el § 2, para la evaluación aplicada a la población observada, se usaron los criterios de los años anteriores al experimento: A final del curso, se espera que los estudiantes puedan aplicar el cálculo al estudio de las funciones algebraicas. El anexo 3 presenta la prueba de fin de semestre, en la que el uso de la tecnología se recomienda, pero no abastece respuestas automáticas.

En el experimento hecho en años anteriores con grupos de la misma universidad, se habían aplicado pruebas iguales, sólo que el test se había aplicado una única vez como test diagnóstico. Aunque, en este artículo, no reportamos los resultados de aquellos grupos, cabe señalar que las condiciones de éxito observadas fueron similares a las del grupo de 2009.

Análisis de las preguntas de evaluación planteadas

En el anexo se encuentran las pruebas individuales aplicadas a los estudiantes. El cuestionario inicial o pre-test de carácter diagnóstico y el examen parcial fueron exámenes individuales de duraciones respectivas 2 horas (máximo) y 1 hora con uso de la computación, mientras los cuestionarios sobre las poleas se aplicaron a grupos generalmente compuestos de dos estudiantes (binomios). Investigaciones de la fase exploratoria del proyecto habían mostrado que los tratamientos que suponen cierta habilidad en el manejo de variables pueden constituir un obstáculo en estudiantes de recién ingreso al nivel superior. Y se había constatado en el pre-test exploratorio, que, con respecto al manejo de variables, muchos estudiantes sólo saben sustituir valores numéricos. Incluimos también el manejo de la proporcionalidad en el campo numérico, porque habíamos observado todavía dificultades en una parte de la población de este nivel. Esta observación nos condujo a distinguir tres categorías de preguntas en los instrumentos de medición:

- La categoría NUM, que contiene preguntas numéricas. Por ejemplo, sumar dos fracciones
- La categoría ALG, que contiene preguntas con cálculo algebraico de respuesta numérica. Por ejemplo, resolver una ecuación dada
- La categoría FUN, que contiene preguntas con una variable en la respuesta. Por ejemplo, dado la expresión $f(x) = - x^2 + 2x$, determinar $f(x+1)$.

Esta organización es una forma sencilla que, a *grosso modo*, corresponde a la propuesta, ya comentada, de Adjiage & Pluvinage (2008 y 2012) de dividir el tratamiento de las matemáticas en: estrato de la aritmética elemental (las cuatro operaciones), estrato racional (fracciones y proporciones), estrato algebraico (escritura y resolución de ecuaciones) y estrato funcional (uso de variables y parámetros en funciones reales, composición de funciones).

Test diagnóstico
La repartición de las 20 preguntas del pre-test en términos de categorías de contenido es:
Cinco preguntas en la categoría NUM: 1, 2, 4, 5, 7 (las tres últimas presentan fracciones)
Diez preguntas en la categoría ALG: 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14a, 14b, 15a
Cinco preguntas que pertenecen a la categoría FUN: 13, 14c, 14d, 15b, 15c

Examen parcial.
La composición del examen parcial en términos de categorías de contenido es:
Dos preguntas en la categoría NUM: 1b, 1c (coordenadas)
Cinco preguntas en la categoría ALG: 2, 4, 6a, 6b, 7a
Seis preguntas que pertenecen a la categoría FUN: 1a, 3a, 3b, 5, 7b, 8

4. *Resultados globales del pre-test y del examen parcial*

De los 40 estudiantes del grupo observado, 38 presentaron el pre-test y el examen parcial. Se mostrarán los resultados de estos estudiantes.

Los resultados más significativos, en el curso de cálculo, son los que corresponden a preguntas en las que aparecen variables. De ahí que las preguntas de las categorías ALG y FUN fueran mayoritarias: Hay 15 preguntas de estas categorías en el pre-test y 11 en el examen parcial. En base a los resultados, determinamos cuatro subgrupos en la población tanto en el pre-test como en el examen parcial.

- El grupo 1 lo constituyen los estudiantes que proporcionan una respuesta correcta a la mayoría de las preguntas. Esto es, 8 o más éxitos en el pre-test, y 6 o más éxitos en el examen parcial.
- En el grupo 2 ubicamos a los estudiantes que obtienen entre el 30% y el 50% de éxitos. Es decir, entre 5 y 7 éxitos en el pre-test, y entre 4 y 5 éxitos en el examen parcial.
- El grupo 3 lo forman los estudiantes que obtienen entre el 20% y el 30% de éxitos, lo que corresponde en el pre-test a 3 o 4 éxitos y en el examen parcial a 3 éxitos.
- En el grupo 4 están los estudiantes que obtienen menos del 20% de éxitos Esto es 2 éxitos o menos tanto en el pre-test como en el examen parcial.

A partir de los resultados obtenidos en las dos pruebas se obtiene la tabla 1 de contingencia. Por ejemplo, leemos en dicha tabla, que 7 estudiantes pertenecen al grupo 2 del pre-test y alcanzan el grupo 1 del examen parcial, pero que 6 estudiantes del mismo grupo del pre-test caen en el grupo 4 del examen parcial. Esta caída no significa que sus conocimientos disminuyeron, dado que las preguntas no son las mismas, sino que su situación con respecto a los requisitos empeoró.

Parcial / Pretest	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Total
Grupo 1	3	1	0	0	*4*
Grupo 2	7	0	3	6	*16*
Grupo 3	3	5	1	3	*12*
Grupo 4	1	2	1	2	*6*
Total	*14*	*8*	*5*	*11*	*38*

Tabla 1. Contingencia de datos

La consideración de las márgenes de la tabla nos muestra una situación inicial poca exitosa, con sólo 4 estudiantes en el grupo 1 en el pre-test. Hay un incremento evidente en el examen parcial, puesto que el mismo grupo 1 cuenta con 14 estudiantes.

La comparación de los resultados del pre-test y del examen parcial conduce a la hipótesis nula de independencia de las filas y de las columnas. El p-valor del Chi-cuadrado que resulta de la tabla de contingencia es 0.213. Como este valor es superior al nivel de significación $\alpha = 0.05$, no se puede rechazar la hipótesis nula H0. Este es un primer resultado interesante desde el punto de vista educativo, porque subraya el hecho de que en el experimento se compensaron carencias iniciales: un estudiante con poca habilidad inicial en el manejo de variables tiene sin embargo la posibilidad de obtener resultados correctos. Por lo tanto no podemos acertar que la mejoría se atribuya a la sola propuesta de enseñanza.

5. *Comparación de las dos aplicaciones del test ¿Se redujeron las deficiencias iniciales?*

En la tabla 2 se muestran los resultados de las dos aplicaciones del test, obtenidos por los 26 estudiantes que respondieron a la totalidad de las pruebas. A cada estudiante le asociamos su índice de éxito en las tres categorías mencionadas, es decir la proporción de preguntas de la categoría que resolvió de manera correcta. Se observa en la parte superior de la tabla el fuerte aumento del índice de éxito, y subrayamos que el mayor aumento es el del estrato funcional: .3 de FUN1 a FUN2. Eso es una media, pero el aumento se advierte también individuo por individuo: En la parte inferior de la tabla se registran los números de estudiantes cuyos resultados de la segunda aplicación del test fueron superiores, iguales o inferiores a los de la primera aplicación. El resultado general es un avance evidente.

La conclusión que proponemos es que la propuesta didáctica experimentada puede producir la compensación deseada de posibles deficiencias, sin necesidad de cursos remediales. Una hipótesis verosímil para aclarar este efecto observado es que la práctica regular de actividades controladas, en particular con la ayuda de los recursos computacionales que se usaron en nuestro experimento de enseñanza, proporciona un número suficiente de oportunidades de corregir concepciones erróneas para producir efectos de aprendizaje con respecto a los prerrequisitos del curso de cálculo.

Categoría	NUM1	NUM2	ALG1	ALG2	FUN1	FUN2
Media del índice de éxito	.56	.79	.34	.53	.29	.59

Categoría		NUM	ALG	FUN
Número de estudiantes cuyo segundo resultado es:	Mayor	17	21	19
	Igual	8	3	5
	Menor	1	2	2

Tabla 2 – Resultados, por categorías, de las dos aplicaciones del test

Pruebas y calificación final

De los 40 estudiantes del grupo, 32 obtuvieron un resultado final exitoso (Tabla 3). Es esta proporción de éxito del 8/10 un resultado muy importante en sí mismo, cuando se compara con los resultados tradicionales de la materia que recordamos en la introducción. Además una observación sobresaliente es que, en el grupo observado, todo estudiante que entregó la totalidad de las pruebas salió aprobado. En otras palabras, los estudiantes que fracasaron estuvieron ausentes durante algunas de las pruebas.

	Aprobado	Reprobado
Todas las pruebas presentadas	26	0
Falta una prueba o varias	6	8

Tabla 3 – Presencia y resultado final del curso

Debido a los resultados obtenidos, no tendría sentido analizar la relación entre el éxito final y los niveles que resultan del test diagnóstico. Pero lo que se puede considerar es el nivel final de la calificación, de simplemente regular a excelente: ¿Hay una relación del nivel de éxito final con los resultados del test diagnóstico? Esta pregunta se añade a la pregunta inicial sobre la posible reducción de deficiencias iniciales observadas en el pre-test y se puede estudiar mediante el método de análisis de discriminante que presentamos a continuación.

Análisis discriminante

Para estudiar las preguntas planteadas, una herramienta útil es el análisis discriminante, en la que los grupos formados de una partición de la población se relacionan con valores de variables cuantitativas. En nuestro caso, tres grupos equilibrados se destacan de forma natural a partir de las calificaciones de fin del curso oficialmente registradas, establecidas en una escala de 0 a 10:

- REG, grupo “regular” que corresponde a niveles de calificación de 6 a 7
- BUE, grupo “bueno” que corresponde al nivel de calificación 8
- SUP, grupo “superior” que corresponde a niveles de calificación de 9 a 10

Cabe señalar que la puntuación de 8 en México tiene un valor específico: Por ejemplo, en varias instituciones se considera como la calificación que permite al estudiante conseguir una beca de estudio.

Los 26 estudiantes considerados en el análisis discriminante por dar lugar a resultados completos, se distribuyen de la manera siguiente: 9 en el grupo REG, 9 en el grupo BUE, y 8 en el grupo SUP.
Las variables cuantitativas consideradas en el análisis fueron los porcentajes de éxito con respecto a las categorías del test definidas arriba (NUM = preguntas numéricas, ALG = preguntas con variables dando lugar a un resultado numérico, FUN = preguntas dando lugar a resultado variable) y la calificación del examen parcial (PARC). Debido a que el pretest se aplicó dos veces, distinguiremos el resultado de cada aplicación por los números 1 para el resultado inicial y 2 para el segundo resultado. De esta forma, se establecieron siete variables cuantitativas para el análisis: NUM1, ALG1, FUN1, NUM2, ALG2, FUN2, PARC.

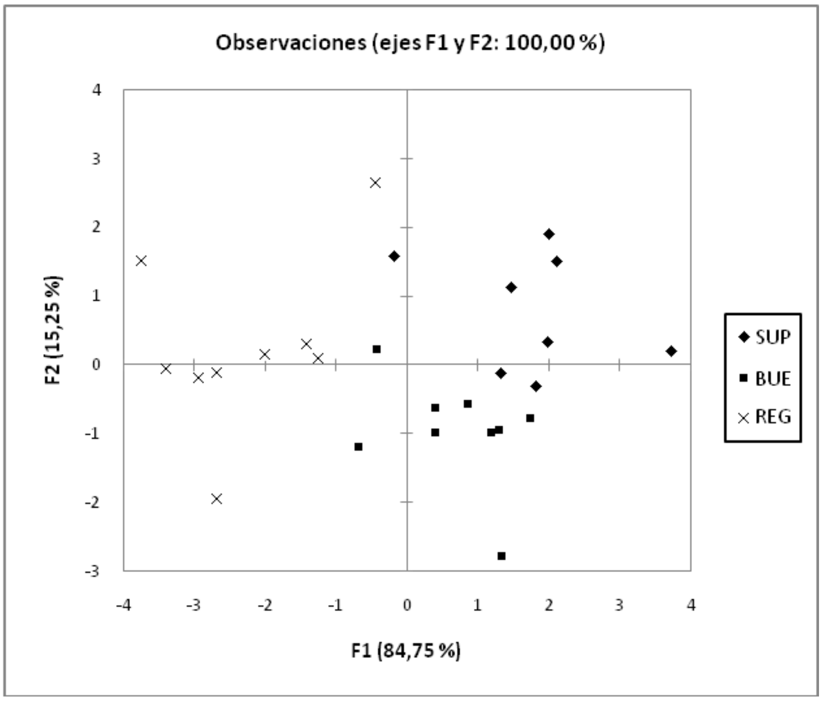


Figura 3. Localización de los individuos en el plano de los factores

	F1	F2
NUM1	0,749	-0,328
NUM2	0,185	0,758
ALG1	0,782	0,169
ALG2	0,301	0,376
FUN1	0,553	-0,096
FUN2	0,621	0,512
PARC	0,752	0,277

Tabla 4
Correlaciones Variables/Factores

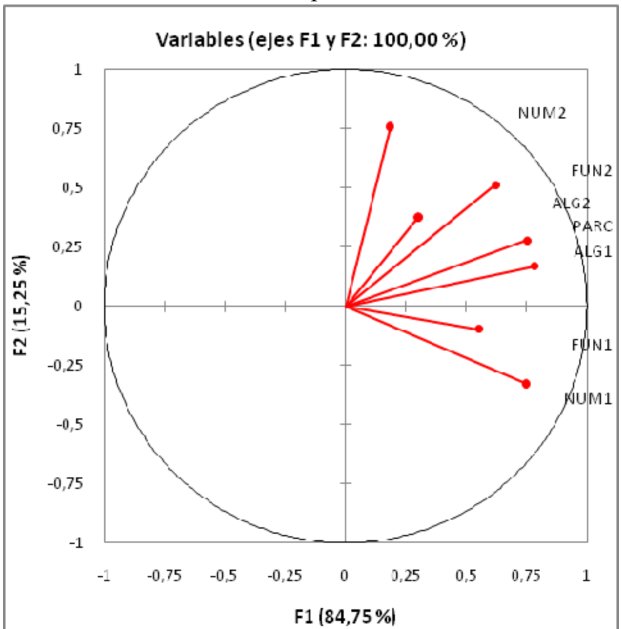


Figura 4. Representación de las variables

El resultado del análisis discriminante es contundente por su pertinencia y coherencia. A continuación presentamos los rasgos principales:

- Los datos registrados de los tests y del examen parcial permiten localizar correctamente a casi todos los estudiantes en los tres grupos. Sólo 2 de los 24 estudiantes no son puestos a sus lugares correctos (*Omar* que obtuvo una calificación final de 10 es anexado al grupo BUE en vez de SUP, *Yoban* que obtuvo una calificación final de 7 es anexado al grupo SUP en vez de REG), todos los demás son anexados por el análisis a sus grupos reales. Esto significa que las pruebas aplicadas antes del examen final autorizan una predicción fiable para el nivel final obtenido por un alumno del curso.
- El primer factor del análisis (85% de la discriminación) ya ordena bastante bien los individuos según los grupos, desde los individuos del grupo REG que tienen una primera coordenada negativa, pasando por los del grupo BUE que ocupan una posición intermedia, hasta los de SUP del lado positivo. El segundo factor (15% de la discriminación) precisa la distinción entre los grupos BUE y SUP (figura 3). En seguida vamos a estudiar las variables subyacentes al fenómeno.

En efecto, las correlaciones entre las variables y los factores (tabla 4 y figura 3) son de gran interés. Las variables de mayor correlación con el primer factor son dos iniciales: los elementos más básicos del test diagnóstico (NUM1 y ALG1), y dos de desarrollo: el nivel del parcial (PARC), lo que era esperado, y el nivel alcanzado en la segunda aplicación del test para los tratamientos de variables (FUN2). Eso significa que el alcance del nivel superior por un estudiante en la calificación final depende de lo más básico del test diagnóstico y de lo más avanzado de la segunda aplicación del test. En otras palabras, esta última observación significa que el mejor éxito corresponde a la adquisición de los tratamientos de variables en el universo de las funciones, es decir el estrato funcional.

El hecho de que las variables más básicas en la segunda aplicación del test (NUM2 y ALG2) tienen poca relación con el nivel de éxito final, ilustra la disminución de las deficiencias iniciales en la población estudiantil observada: A final del curso impartido, las posibles dificultades se sitúan más allá de los prerrequisitos.

6. *Conclusiones del experimento y perspectivas*

Uno de los problemas más graves de la educación superior es el nivel académico del aspirante a cada ciclo escolar, debido a que en general se observan graves deficiencias en los prerrequisitos en matemáticas. Ante este problema, las instituciones recurrentemente proponen cursos remediales. En general, el resultado de estos cursos ha sido poco alentador o no rinde los resultados esperados. Esto no debería resultar extraño, dado que se comete el error de enseñar los temas de matemáticas de manera semejante a como fueron enseñados y en un tiempo muy reducido. Nuestra tarea consistió, desde el inicio, en mostrar que mediante actividades cuidadosamente diseñadas dentro de un marco didáctico preciso, vecino de la RME (Real Mathematics Education) que se ha experimentado en el Instituto Freudenthal, orientado principalmente hacia la expresión y con el apoyo didáctico de la tecnología, se podría solventar las deficiencias con las que un alumno inicia un curso de matemáticas a nivel superior.

Este artículo muestra esta posibilidad. En efecto, las deficiencias iniciales detectadas se redujeron de manera significativa en la población experimental. Además, todos los estudiantes de esta población que estuvieron regularmente presentes durante el transcurso del cuatrimestre aprobaron el curso de cálculo. Sólo en el nivel de éxito final alcanzado se reflejan las posibles deficiencias iniciales.

Ahora queda por investigar en varios centros el carácter de réplica del experimento. Al lado de la experiencia presentada en este artículo se ha generado un Seminario Nacional que agrupa en la actualidad ocho Universidades de México por medio de videoconferencia, para el estudio de la enseñanza del cálculo, que culmina cada año con un Encuentro Nacional e Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo en México. Estos eventos pueden, en particular, contribuir a extender el presente estudio en esta dirección.

Este artículo no tenía como objeto estudiar el nivel de adquisición de los conceptos propios del cálculo: De los resultados de los estudiantes presentados sólo se observa que cumplen con los requisitos de la evaluación usual. Así entonces un objetivo de la investigación que queda por profundizar es el tema de la comprensión conceptual del cálculo. ¿En las condiciones descritas, cuáles son los conceptos y los métodos de tratamiento que los estudiantes adquieren y hasta qué nivel? Para responder a esta pregunta, proponemos diseñar y experimentar en el futuro actividades didácticas, con la creación de escenarios interactivos para cada uno de los conceptos asociados y elaborar los respectivos instrumentos de medición y evaluación.

Bibliografía

ADJIAGE R. & PLUVINAGE, F. (2008), A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), *Science Education Issues and Developments* (pp. 5-57), New-York: Nova Publishers

ADJIAGE R. & PLUVINAGE, F. (2012), Strates de compétences en mathématiques. *Repères IREM, vol. 88*

AEBLI, H. (1995). *12 formas básicas de enseñar*, NARCEA, España.

AMIT, M & VINNER, S. (1990) Some Misconceptions in Calculus - Anecdotes or the Tip of an Iceberg? *Proceedings Fourteenth PME Conference* Vol. I, pp.3-10, 1990, México: PME

ANDREU IBARRA, M. E. & RIESTRA VELÁZQUEZ, J. (2007) Et si nous en restions a Euler et Lagrange ? *Annales de didactique et sciences cognitives,* Vol. 12, pp. 165-187

ANUIES (2006) *Consolidación y avance de la educación superior en México. Elementos de diagnóstico y propuestas*. ANUIES, Documentos institucionales, México.
http://www.anuies.mx/result.php?cx=000208596329648011506%3Azfp6xmgnhrm&cof=FORID%3A10&ie=UTF-8&q=indices+reprobacion+nivel+superior

ARTIGUE, M. (2002) Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual work, *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, Vol. 7, No. 3, pp. 245 - 274.

ASIALA, M., COTTRILL, J., SCHWINGENDORFF, K. & DUBINSKY, E. (1997). The development of students, graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 16, No.4, pp. 339 – 431

BLOCH, I. (2003).Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52: 3–28. 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

CALCAGNO, J. C. & LONG, B. T. (2008). *The Impact of Postsecondary Remediation Using a Regression Discontinuity Approach: Addressing Endogenous Sorting and Noncompliance*. National Center for Postsecondary Education, USA
Retrieved from
http://www.postsecondaryresearch.org/i/a/document/8162_CalcagnoLongRevised.pdf

CUEVAS, C. A. & MEJÍA, H. R. (2003). *Cálculo visual* (Libro de texto incluyendo un disco compacto con el software CalcVisual), Oxford University Press, México

CUEVAS, C. & PLUVINAGE, F. (2003). Les projets d`action pratique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques, *Annales de didactique et sciences cognitives.* Vol. 8, pp. 273-293

CUEVAS, A., MORENO, S. & PLUVINAGE F. (2005). Una Experiencia De Enseñanza Del Objeto Función. *Annales de didactique et sciences cognitives,* Vol. 10, pp. 177-208.

DARKEN, B., WYNEGAR, R. & KUHN, S. (2000). Evaluating Calculus Reform: A Review and a Longitudinal Study, in Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H. & Kaput, J. (Eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education. Vol. 8*. pp. 16-40. American Mathematical Society.

DORIER, J. L. (2010). Mathematics in its relation to other disciplines: Some examples related to economics and physics, *El Cálculo y su Enseñanza*, Vol.2, Cinvestav-IPN, México. At http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

DRIJVERS, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. Doctoral Dissertation. At: www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6319.pdf

GRABINER, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: the Derivative from Fermat to Weierstrass, *Mathematics Magazine*, 56(4), pp. 195–206.

GRAY, E. & TALL, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115–141

HARDY, N. & SIERPINSKA, A. (2012). Mathematical organization of some French and English algebra textbooks used in remedial courses in colleges and universities in North America, in *Formation à la recherche en didactique des matématiques*, Hitt, F. et Cortes C. (eds.), Loze-Dion, Longueuil (Québec), Canada, p. 239.
The paper can be viewed online at:
https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=explorer&chrome=true&srcid=0BzPon7xqQGcCYmU0ZmVjYjktMDgxOS00NjhhLTkzODctOWNjOTU5ZTYxNTg3&hl=en_US

ÍMAZ JAHNKE, C. & MORENO ARMELLA, L. (2010). *La Génesis y la Enseñanza del Cálculo*, Editorial Trillas, México

KENT, P. & NOSS, R. (2002) The mathematical components of engineering expertise (The relationship between doing and understanding mathematics), *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education (Professional Engineering Scenarios 2)*, 39/1-39/7, London UK

KLEINER, I. (1989) Evolution of the Function Concept: A brief survey. The *college Mathematics Journal*, 20(4), pp. 282-300.

LAGRANGE, J.B. (2005). Transposing Computer Tools from the Mathematical

Sciences into Teaching, Some possible obstacles, in: Guin D., Ruthven K. & Trouche L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, Chap. 5, pp. 67-82, Springer Netherlands.

LEITHOLD, L. (1998). *El Calculo*. 7 edición Editorial Oxford University Press.

Martínez Reyes, M. (2005). *Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior*. Tesis doctoral. Cinvestav-IPN, México, D. F.

MONNA, A. F. (1973). *Functional analysis in historical perspective*, Wiley, USA

MONZOY, J. A. (2002). *Una situación real como registro de representación en un entorno computacional. Un sustento cognitivo para promover la aprehensión conceptual*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México.

NCTM (2011) *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics. Consultado en línea el 8 de julio de 2012 en http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26809

NISS M. (2003) Mathematical Competencies and the Learning Mathematics: The Danish Kom Projects. *Mediterranean Conference on Mathematical Education*. The Hellenic Mathematics Society, Athenas, Greece

PLUVINAGE, F. & CUEVAS, C. A. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función, in Eugenio Filloy (ed.) *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Editorial Santillana,. México. pp. 141-167

RUTHVEN, K. & HENNESSY S. (2002) A Practitioner Model of the Use of Computer-Based Tools and Resources to Support Mathematics Teaching and Learning, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, pp. 47-88

RÜTING, D. 1984. Some definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. 6 (4)

SIMMT, E. (1997) Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching,* Vol. 16 No. 2/3, pp. 269-289

SKEMP, R. (1976) Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, Vol. 77, pp. 20-26

SLAVIT, D. 1997. An alternate route to the reification of function. Educational Studies in Mathematics 33, 259-281. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

STEWART, J. (2010) *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos*. Cenage Learning. México.

STROUP, W.M. (2002) Understanding Qualitative Calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, Vol. 7, pp. 167-215.

SWOKOWSKY, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

TALL, D. (1997) Functions and Calculus, in: Bishop, A. J. et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325), Kluwer, Netherlands.

THURSTON, W. (1994) On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 30 No.2, pp. 161-177

YOUSCHKEVITCH, A. P. The *Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16 (1976) pp. 37-85

Los autores agradecen a los revisores sus observaciones precisas, que les permitieron mejorar las versiones iniciales del artículo.

Carlos Armando CUEVAS VALLEJO,
DME-CINVESTAV-IPN, ccuevas@cinvestav.mx

Magally MARTÍNEZ REYES,
UAEMex, mmreyes@cinvestav.mx

François PLUVINAGE,
DME-CINVESTAV-IPN e IREM Strasbourg, pluvin@math.unistra.fr

ANEXO 1 **PRETEST (resuelto)**

Esta evaluación es confidencial y no tiene significación o peso negativo para la calificación del estudiante en el curso. Sólo proporciona información para investigar a qué nivel se debería de iniciar las materias de Matemáticas. Por su importancia es necesario que se responda con honestidad puesto que puede alterar el diseño del curso.

Marque con una X en el cuadrito correspondiente en la opción que creas correcta y deja en blanco si se desconoce la respuesta.

Nombre: ____ Carrera y grupo:

1. Calcular $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$

☐ 8/11; ☐ 21/20; ☐ 15/28; ☒ 41/28; ☐ Otra solución

2. Calcular $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$

☐ 2/24; ☒ -1/12; ☐ -1; ☐ 38/24; ☐ Otra solución

3. Calcular $\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}$

☐ 0; ☐ $\frac{1}{n(n-1)}$; ☐ $-\frac{1}{2}$; ☐ $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$; ☒ Otra solución

4. ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

☒ 3.5; ☐ 1.6; ☐ -8.9; ☐ 0.546 ☐ -987

5. Calcular $3(5\text{-}8)^2 + 3\left[2(4+2)\text{-}5(2\text{-}6)\right]$

☐ 29; ☐ 43; ☐ 83; ☐ 32; ☒ Otra solución

6. Reducir los siguientes términos $2a(a\text{-}2b)^2 + 5b\left[2a(b+a)\text{-}b(2a\text{-}b)\right]$

☐ $5a^2+56ab+55b^2$; ☐ $2a^3+2a^2b+8ab^2\text{-}5b^3$; ☐ $\text{-}\ 150b^3+98ab^2\text{-}2a^2b+6a^2$;

☐ $150b^3+68ab^2\text{-}21a^2b+6a$; ☒ Otra solución

7. Un vendedor expende artículos a comisión recibiendo 3 pesos por cada artículo vendido. El vendedor trabaja de lunes a viernes. Paga diariamente 5 pesos para que le permitan vender en el mercado y 6 pesos de transporte.

¿Cuántos artículos debe vender en una semana para que, restando sus gastos, le queden 35 pesos por cada día de trabajo?

☐ 100; ☐ 30; ☐ 150; ☐ 90; ☒ Otra solución

8. Marque la respuesta que sea la solución de la desigualdad $-30x+4\leq 0$:

☐ $x=\frac{2}{15}$; ☒ $x\geq\frac{2}{15}$; ☐ $(-\infty,\infty)$; ☐ $x\leq\frac{2}{15}$; ☐ Otra solución

9. Resolver $2x^2-3x-2=0$

☐ $x_1=-2$ y $x_2=\frac{2}{3}$; ☐ $x_1=2$ y $x_2=-\frac{2}{3}$; ☒ $x_1=2$ y $x_2=\frac{-1}{2}$;

☐ $x_1=-2$ y $x_2=-\frac{2}{3}$; ☐ Otra solución

10. Considere $P(x)=x^3-x$. Todas las raíces de esta función son:

☐ 0 y 1; ☐ 1 y 2; ☐ 1 y –1; ☐ -1 y 0; ☒ Otra solución

11. Resuelva el siguiente sistema:

$x-2y=1$

$x+y=4$

☐ $x=-1,\ y=-1$; ☐ $x=1,\ y=3$; ☐ $x=7,\ y=-3$; ☒ $x=3,\ y=1$;

☐ Otra solución

12. Resuelva el siguiente sistema:

$x-2y=1$

$x+y=\lambda$

☐ $x=\frac{2\lambda-1}{3},\ y=\frac{\lambda+1}{3}$; ☒ $x=\frac{2\lambda+1}{3},\ y=\frac{\lambda-1}{3}$; ☐ $x=3-2\lambda,\ y=-\lambda+1$;

☐ $x=3+2\lambda,\ y=\lambda-1$; ☐ Otra solución

13 En la ecuación $x=1+\frac{1}{y}$, despeja *y* en función de *x*.

☐ $y=1+\frac{1}{x}$; ☒ $y=\frac{1}{x-1}$; ☐ $y=1+\frac{1}{x+1}$; ☐ $y=\frac{x+1}{x}$; ☐ Otra solución

14. Sea la expresión $y = 2 - \frac{1}{x}$; marque con una x en el cuadro correspondiente a la propiedad que se cumple.

$x = 0$, $y = 2$	☒ Falso	☐ Verdadero
$x = 1$, $y = 1$	☐ Falso	☒ Verdadero
$y = \frac{1}{2 - x}$	☒ Falso	☐ Verdadero
$x = 2 - \frac{1}{y}$	☒ Falso	☐ Verdadero

15. Dada la función real $f(x) = x^2 + 1$

15.1 $f(-1) =$

☐ 0; ☒ 2; ☐ –1; ☐ 1; ☐ Otra solución

15.2 $f(x+1) =$

☐ $x + 2$; ☐ $x^2 + 2$; ☐ $x^2 + x + 1$ ☒ $x^2 + 2x + 2$; ☐ Otra solución

15.3 ¿Cuál es el rango?

☐ $x = -1$; ☒ $(1, \infty)$; ☐ $(-\infty, \infty)$; ☐ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; ☐ Otra solución

ANEXO 2 **EXAMEN PARCIAL** **(con las respuestas en cursivas)**

Alumno______________________________________Carrera ICO-I

Nota importante: *Se requiere anexar, en hojas aparte, el procedimiento y justificación de cada respuesta. Si sólo se escribe la solución se considerará inválida o errónea.*

1. La tabla de abajo corresponde a una función lineal.

F(x)	-5	-2	1	4		
x	-1	0	1	2		

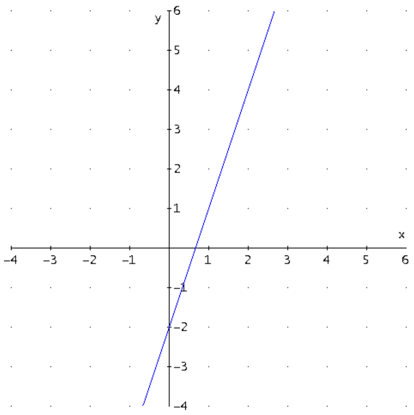
a) Determina la función lineal

F(x) = 3x – 2

b) Completa la tabla

F(x)	-5	-2	1	4	*7*	*10*
x	-1	0	1	2	3	4

c) Traza su gráfica



2. Usa Calcvisual para determinar las raíces reales del polinomio siguiente: $P(x) = 2x^5 + x^4 - 18x^3 - 9x^2$

x_1= -3, x_2= -0.5, x_3= 0, x_4= 0, x_5= 3

3. Propone dos polinomios que tengan al menos las raíces reales siguientes: -2, 0, 0, 3 y 5.

$P(x) = (x+2)x^2(x-3)(x-5) = x^5 - 6x^4 - x^3 + 30x^2$

y, por ejemplo, $Q(x) = (x+2)(x-2)x^2(x-3)(x-5) = x^6 - 8x^5 + 11x^4 + 32x^3 - 60x^2$

4. Determina los intervalos en los que la siguiente función es positiva y en los que es negativa: $H(x) = -2x^3 + 16x^2 + 24x - 126$

x	- ∞		-3		2.459…		8.541…		∞
H(x)		+	0	−	0	+	0	−	

5. Da un ejemplo de un polinomio con raíces en 0, -2 y 5 y que además sea negativo en (- ∞, -2), positivo en (-2, 0), positivo en (0, 5) y negativo en (5, ∞).

$$P(x) = -(x+2)x^2(x-5) = -x^4 + 3x^3 + 10x^2$$

6. Determina el dominio de las funciones reales:

a) $G(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

$$D_G = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$$

b) $M(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 3}$

$$D_M = \square$$

7. Dada la función $f(x) = 2x^2 + x + 4$

a). Evalúa la función en

x	-1	0	1/2	2/3	2	3
f(x)						

x	*-1*	*0*	*1/2*	*2/3*	*2*	*3*
f(x)	*5*	*4*	*5*	*50/9 = 5.555…*	*14*	*25*

b). Demuestra que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x + 1 + 2h$

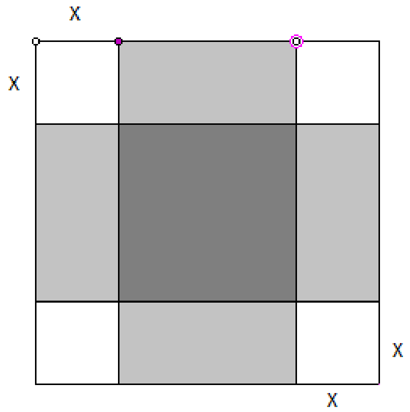
8. La temperatura de congelación del agua es 0°C(ó 32 °F). La temperatura de ebullición es 100°C (ó 212 °F). Utilice esta información para encontrar una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C ¿Qué incremento de temperatura en °F corresponde a un incremento de temperatura de 1°C?

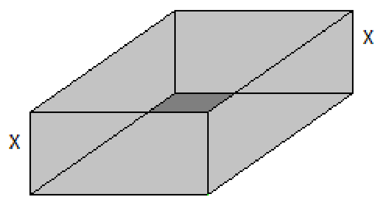
$$f : C^\circ \to F^\circ \text{ ; } f(x) = \frac{212 - 32}{100 - 0}x + 32 = {}^{180}\!/_{100}\, x + 32 = 1.8x + 32 .$$

ANEXO 3 EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

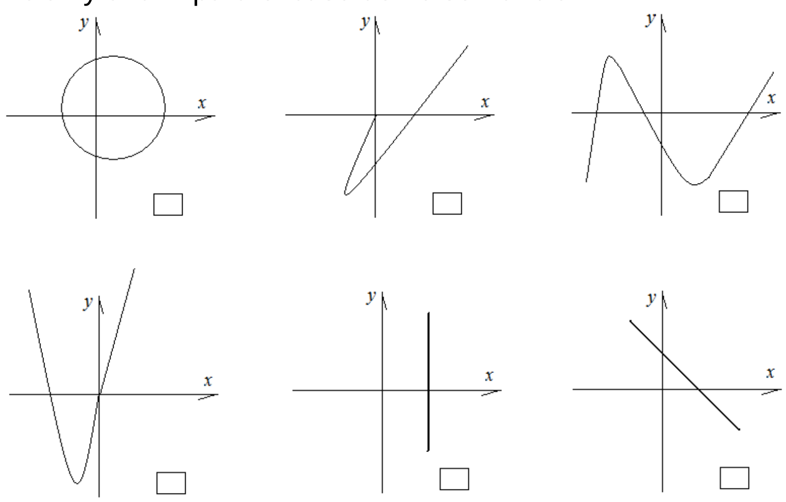
Nota Importante: ***Se requiere anexar, en hojas aparte, el procedimiento y justificación de cada respuesta. Si sólo se escribe la solución se considerará inválida o errónea.***

1. Se desea recortar cuadrados de lado *x* en las esquinas de una hoja cuadrada de longitud 13 cm para construir una cajita de chicles. Determina la función Volumen V(*x*), su dominio y rango.





2. En las siguientes gráficas determina cuál es función y cual no, escribiendo en el cuadrito, una S para reconocerla como gráfica de función y una N para el caso de no ser función.



3. Si $f(x) = -3x^2 + 2x - 2$

a) Evalúa $f(x)$ en $x=-4$; $x=-\frac{1}{2}$ y $x=1$

b) Determina $f(x+h)-f(x)=$

4. A partir de la siguiente tabla de valores de una función lineal determina la expresión de la misma:

F(x)	1	2	0	-1
x	0	-1	1	2

F(x) = ___________________

5. Se tienen las siguientes raíces reales: $r_1=-3$; $r_2=-1$; $r_3=0$ y $r_4=3$. Determina y escribe un polinomio que tenga al menos estas raíces reales. Puedes utilizar CalcVisual.
6. Se tiene el siguiente signo de un polinomio $P(x)$. Negativo en el intervalo $(-\infty,-2)$; positivo en $(-2,2)$; negativo en $(2,3)$ y positivo en $(3,+\infty)$. Determina el polinomio $P(x)$. Puedes utilizar CalcVisual.

7. Para la función racional:

$$P(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$$

Usa CalcVisual para determinar lo siguiente:

II.a. El dominio

II.b. Las raíces reales

II.c. El signo

II.d. Extensión y asíntotas

II.e. Calcula la derivada

II.f. Puntos críticos

II.g. Monotonía